



Peut-on obtenir des amplitudes correctes avec les équations paraxiales ?

Francis Collino, Benoît Lavaud

► To cite this version:

Francis Collino, Benoît Lavaud. Peut-on obtenir des amplitudes correctes avec les équations paraxiales ?. [Rapport de recherche] RR-3004, INRIA. 1996. inria-00073691

HAL Id: inria-00073691

<https://hal.inria.fr/inria-00073691>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Peut-on obtenir des amplitudes correctes avec les
équations paraxiales ?***

Francis COLLINO, Benoît LAVAUD

N° 3004

Octobre 1996

_____ THÈME 4 _____

 ***apport
de recherche***


Peut-on obtenir des amplitudes correctes avec les équations paraxiales ?

Francis COLLINO*, Benoît LAVAUD†

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Estime

Rapport de recherche no3004 — Octobre 1996 — 93 pages

Résumé : Les équations paraxiales sont des équations aux dérivées partielles dont les solutions sont des ondes se propageant le long d'un axe privilégié. Elles sont très utilisées en sismique réflexion pour imager la réflectivité du sous-sol en exploitant les ondes qui se propagent dans une direction proche de la verticale.

Lorsque l'on veut utiliser ces équations dans le cadre de l'inversion sismique, où il s'agit d'estimer les paramètres physiques du sous-sol à partir des amplitudes vraies des enregistrements, la question se pose de la qualité des amplitudes qu'elles restituent. Dans ce travail, nous montrons par exemple qu'une erreur relative de 20% peut être obtenue sur les solutions de l'équation des ondes linéarisée dans un cône d'ouverture 60°. Cela nécessite de traiter correctement trois difficultés liées aux équations paraxiales : la prise en compte des termes sources, la suppression des modes évanescents et l'absorption sur les bords latéraux.

Tous ces points sont discutés et analysés. De nombreux exemples numériques permettent de décrire la potentialité de notre approche.

Mots-clé : équations paraxiales, approximation de Born, inversion sismique, couches absorbantes

(Abstract: *pto*)

* INRIA-rocquencourt. Francis.Collino@inria.fr

† INRIA-rocquencourt. Benoit.Lavaud@inria.fr

Can we obtain correct amplitudes with paraxial equations ?

Abstract: Paraxial equations are partial differential equations whose solutions are waves propagating in a particular direction. They are often used in seismic reflection to give an image of the reflectivity of the medium by exploiting waves which propagate in a direction close to the vertical.

When these equations are used in a seismic inversion context, where physical parameters of the medium have to be estimated from true amplitudes of recordings, the question of the quality of the amplitudes that can be recovered arises. In this work, we show as an example that a relative error of 20% can be obtained with the solutions of the linearized wave equation in a cone of aperture 60° . This requires that three difficulties due to the paraxial equations be dealt with correctly: the treatment of source terms, the suppression of evanescent modes and the introduction of absorbing boundary conditions on the lateral edges.

All these points are discussed and analyzed. Several numerical examples show the possibilities of our approach.

Key-words: paraxial equations, Born approximation, seismic inversion, absorbing layers

Table des matières

1	Position du problème	5
2	Introduction aux équations paraxiales	7
2.1	Equation parabolique en milieu homogène	7
2.2	Equation parabolique en milieu hétérogène	8
2.3	Equation paraxiale d'ordre N en milieu homogène	9
2.4	Equation paraxiale d'ordre N en milieu hétérogène	10
2.5	Formulation en fréquence	10
3	Modélisation par équations paraxiales	12
3.1	Approximation de Born de l'équation des ondes	13
3.2	Approximation paraxiale de l'équation des ondes avec second membre	15
3.2.1	Approximation paraxiale sans second membre	15
3.2.2	Transformation du second membre de l'équation des ondes	16
3.2.3	Approximation paraxiale avec second membre	20
3.2.4	Reformulation du problème	22
3.3	Méthodes des approximations de Padé complexes	25
3.4	Conditions aux limites: Utilisation de couches absorbantes (PML)	36
3.5	La source	40
4	Discretisation: Schéma numérique de résolution	42
4.1	Discretisation en x	44
4.2	Splitting en z	45
4.3	Discretisation en z	46
4.3.1	Résolution du problème (P_0)	46
4.3.2	Résolution du problèmes (P_n)	46
4.4	Influence des paramètres γ et θ du schéma	48
4.5	Assemblage du système linéaire	50
4.6	Prise en compte du terme source	55
4.7	Résolution du problème de Helmholtz	58
4.8	Aspects numériques	60
4.8.1	Calcul des intégrales de Fourier	60
5	Résultats numériques	63
5.1	Calcul numérique de l'erreur	64
5.1.1	Cas du champ incident	64
5.1.2	Cas du champ diffracté	65
5.2	Résultats pour le champ incident u_0	66
5.3	Résultats pour le champ diffracté δu	74
5.4	Résultats pour la lentille	87
5.5	Résultats pour le modèle de Marmousi	90

1 Position du problème

La modélisation de la propagation des ondes par les équations paraxiales dans un milieu de vitesse bidimensionnel donne encore lieu à une activité de recherche importante. L'objectif de ce travail est d'essayer de voir comment on peut utiliser les équations paraxiales pour modéliser la propagation des ondes acoustiques, le modèle acoustique complet, c'est à dire non linéarisé, étant ici considéré comme le modèle de référence.

Ce travail est effectué dans le cadre d'une application géophysique et plus particulièrement d'une expérience de sismique réflexion qui consiste à inverser des données sismiques.

Nous nous intéressons à l'approximation paraxiale de l'équation des ondes car le principal inconvénient de la résolution du modèle acoustique complet est son coût informatique.

C'est Claerbout [7] qui a introduit les équations paraxiales en géophysique appliquées aux équations des ondes scalaires. Dans les applications où les équations paraxiales sont utilisées comme un outil d'imagerie sismique et en particulier pour la migration (cf [4],[8]), l'approximation paraxiale est fréquemment utilisée pour calculer les temps d'arrivées mais il n'est pas question de s'intéresser aux amplitudes; il s'agit de propager par les équations paraxiales un champ connu, donné à la surface.

Ainsi, s'il est bien connu que les temps d'arrivées sont correctement modélisés par les équations paraxiales pour des directions de propagation relativement proches de la verticale, il n'en est pas de même en ce qui concerne la restitution des amplitudes et c'est ce à quoi nous allons tenter de donner une réponse.

Dans le cadre de l'inversion sismique où il s'agit d'estimer des paramètres physiques du sous-sol, nous avons besoin à la fois des temps d'arrivées et des amplitudes.

Duquet [12] s'est par exemple intéressé au passage des termes sources pour l'équation des ondes en condition initiale pour les équations paraxiales mais il n'a pas effectué de comparaison avec l'équation des ondes.

De plus, la modélisation de la propagation joue un rôle important sur le coût informatique de la méthode dans son ensemble étant donné le nombre de données sismiques à traiter et la dimension des domaines considérés. Il est donc nécessaire d'avoir un simulateur numérique qui soit performant tout en générant un coût informatique moindre et qui permette une extension naturelle au cas tridimensionnel.

D'autre part, l'hypothèse qui, en sismique, consiste à dire que la propagation n'est pas trop éloignée de la verticale est raisonnable car beaucoup de modèles ont des discontinuités physiques proches de l'horizontale ce qui fait que les équations paraxiales semblent être bien adaptées à ce type d'application. Même chose par exemple en acoustique sous-marine où l'approximation paraxiale est devenue un outil classique et où l'on peut aussi être intéressé par les amplitudes.

En ce qui concerne le modèle de propagation, nous nous intéressons plus particulièrement à l'approximation paraxiale de l'équation des ondes acoustiques pour un milieu à densité constante, c'est à dire qu'un seul paramètre suffit à caractériser le milieu, par exemple la vitesse de propagation c ou l'impédance acoustique σ , reliés par la relation

$$\sigma = \rho c$$

où ρ est la densité.

Ce travail est composé essentiellement de 4 parties. La première partie va consister à effectuer un bref rappel sur l'obtention des équations paraxiales d'ordre quelconque en milieu homogène et hétérogène et va permettre de citer les références nécessaires pour leur construction.

La 2ème partie sera consacrée au problème continu basé sur l'approximation de Born de l'équation des ondes qui permettra d'introduire de manière "naturelle" l'approximation paraxiale et nous utiliserons une méthode d'approximation de Padé complexe pour éliminer les modes parasites propagés par les équations paraxiales.

On présente dans la 3ème partie un schéma numérique de discrétisation des équations paraxiales qui est basé sur les travaux de Collino [9] et qui travaille dans le domaine fréquentiel ce qui permet une grande souplesse d'utilisation.

Enfin, la dernière partie sera consacrée à la validation du schéma numérique et à la comparaison entre l'équation des ondes et son approximation paraxiale à travers des expériences numériques.

2 Introduction aux équations paraxiales

L'approximation paraxiale de l'équation des ondes permet de décrire la propagation des ondes dans une direction privilégiée. Une équation paraxiale est définie par un ordre d'approximation qui décrit le cône des directions de propagation pour lequel la solution est une bonne approximation de l'équation des ondes. Le but de ce paragraphe est d'introduire brièvement la construction des équations paraxiales et de citer les références nécessaires pour comprendre leur élaboration. Elles sont basées essentiellement sur l'approximation de la relation de dispersion de l'équation des ondes. L'apparition de nombreux développements théoriques pour les généraliser en milieu hétérogène [1],[2] ont permis la construction d'une équation connue sous le nom d'équation BEHJ et c'est celle-ci que nous avons choisi de retenir en s'appuyant sur les travaux de Collino [9] qui ont été le point de départ de ce travail. La première étape a été la construction de l'équation parabolique en milieu homogène qui est l'équation paraxiale la plus simple et sa généralisation en milieu hétérogène [1]. Les équations paraxiales d'ordre N basées sur une décomposition en fractions rationnelles de la relation de dispersion permettent d'améliorer l'approximation pour des angles de propagation plus élevés.

2.1 Equation parabolique en milieu homogène

On considère l'équation des ondes en dimension 2 pour un milieu de vitesse homogène avec une vitesse de propagation c

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, z, t) - \Delta u(x, z, t) = 0 \quad (2.1)$$

On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes

$$u(x, z, t) = e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}$$

où ω est la pulsation et $\vec{k} = (k_x, k_z)$ le vecteur d'onde, ce qui donne la relation de dispersion de l'équation des ondes

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.2)$$

De cette relation, on peut définir 2 fréquences ω_+ et ω_- correspondant à des ondes se propageant dans les directions $z > 0$ et $z < 0$ solutions de

$$\frac{ck_z}{\omega_+} = \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega_+^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

$$\frac{ck_z}{\omega_-} = - \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega_-^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

Le champ total $u(x, z, t) = u_+(x, z, t) + u_-(x, z, t)$ est la somme d'un champ u_+ se propageant vers les $z > 0$ et d'un champ u_- se propageant vers les $z < 0$.

Si on introduit la relation de dispersion

$$\frac{ck_z}{\omega} = \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

elle caractérise une équation dont la solution se propage dans le sens $z > 0$, l'axe z étant orienté vers le bas.

Cette relation n'étant pas polynomiale, elle ne correspond pas à une équation aux dérivées partielles mais, dans le cadre qui nous intéresse, nous voulons une bonne approximation de 2.5 pour des ondes se propageant quasi verticalement, c'est à dire pour

$$\sin \theta = \frac{k_x c}{\omega} \ll 1$$

L'idée est alors de faire un développement de Taylor au voisinage de $\frac{k_x c}{\omega} = 0$, ce qui donne naissance à une nouvelle équation :

$$\frac{k_z c}{\omega} = 1 - \frac{1}{2} \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} \quad (2.6)$$

Cette équation correspond à la relation de dispersion d'une équation aux dérivées partielles appelée équation parabolique ou équation paraxiale 15° et qui est l'approximation paraxiale du champ u_+ se propageant vers les $z > 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.7)$$

2.2 Equation parabolique en milieu hétérogène

Nous voulons généraliser l'équation parabolique 2.6 pour un milieu de vitesse $c = c(x, z)$ quelconque. L'idée est de considérer une famille d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{c\sigma(c)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma(c) \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2\psi(c)\xi(c)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi(c) \frac{\partial}{\partial x} (\xi(c)u) \right) = 0 \quad (2.8)$$

et de déterminer les paramètres σ , ψ et ξ en définissant des critères qui permettent d'imposer à la solution un bon comportement physique [1]. Pour cela, on raisonne sur un milieu bicouche constitué d'une interface Γ faisant un angle α avec l'horizontale et on impose le comportement suivant :

- on veut que l'énergie de la solution se conserve au cours du temps afin que le problème de Cauchy associé soit bien posé,
- on impose qu'à incidence normale ($\alpha = 0$) le coefficient de transmission approche au mieux celui de l'équation des ondes,
- on impose que le coefficient de transmission et de réflexion soit continu lorsque l'angle α tend vers 0.

Ces 3 critères permettent de définir les 3 paramètres σ , ψ et ξ et d'aboutir à une seule formulation possible [1] :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{c^{\frac{1}{2}}} \right) \right) = 0 \quad (2.9)$$

Cette équation peut se réécrire de manière plus simple en effectuant le changement de variable $v = c^{-\frac{1}{2}} u$:

$$\begin{cases} v = c^{-\frac{1}{2}} u \\ \frac{1}{c} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial}{\partial x} v \right) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

2.3 Equation paraxiale d'ordre N en milieu homogène

Le but est de construire une équation paraxiale dont la solution soit une bonne approximation de l'équation des ondes pour des directions de propagation plus éloignées de la verticale. Il s'agit d'obtenir une meilleure approximation de

$$\frac{ck_z}{\omega} = \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

en utilisant les approximations de Padé qui permettent une décomposition en fractions rationnelles de l'opérateur $(1 - X)^{\frac{1}{2}}$.

L'approximation de Padé d'ordre 1 de la fonction $f(X) = (1 - X)^{\frac{1}{2}}$ avec $X = \frac{ck_x}{\omega}$ en 0 donne

$$\frac{ck_z}{\omega} = \frac{1 - \frac{3}{4} \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}}{1 - \frac{1}{4} \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}}{1 - \frac{1}{4} \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}} \quad (2.12)$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$\omega^3 - ck_z \omega^2 + \frac{3}{4} c^2 k_x^2 \omega - \frac{1}{4} c^3 k_x^2 k_z = 0 \quad (2.13)$$

Cette relation s'interprète comme la relation de dispersion d'une équation aux dérivées partielles appelée équation paraxiale 45° :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + c \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} - \frac{3}{4} c^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{4} c^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 0 \quad (2.14)$$

A partir de la relation 2.12, l'approximation de Padé admet une généralisation à l'ordre N de la forme

$$f_N(X) = 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N X}{1 - \alpha_n^N X} \quad (2.15)$$

ce qui donne pour la relation de dispersion 2.11:

$$\frac{ck_z}{\omega} = 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N k_x^2 c^2}{\omega^2 - \alpha_n^N k_x^2 c^2} \quad (2.16)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_n^N = \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right) \\ \beta_n^N = \frac{2}{2N+1} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right) \end{cases} \quad (2.17)$$

La relation 2.16 s'interprète comme la relation de dispersion d'une équation aux dérivées partielles appelée équation paraxiale d'ordre N en milieu homogène qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial z} - \sum_{n=1}^N \beta_n^N \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial t^2} - \alpha_n^N \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases} \quad (2.18)$$

En posant $\alpha_1 = 0$ $\beta_1 = \frac{1}{2}$, on obtient l'équation paraxiale 15°.

Pour $N = 1$ $\alpha_1^1 = \frac{1}{4}$ $\beta_1^1 = \frac{1}{2}$, on obtient l'équation paraxiale 45°.

Pour $N = 2$, on obtient une équation connue sous le nom d'équation paraxiale 60°.

2.4 Equation paraxiale d'ordre N en milieu hétérogène

Nous cherchons une généralisation de l'équation paraxiale 2.18 (de la même manière que nous avons généralisé l'équation parabolique en milieu homogène) dont les solutions ont un bon comportement physique. L'équation parabolique définie par 2.10 peut se réécrire à l'aide d'une fonction auxiliaire φ sous la forme :

$$\begin{cases} v = c^{-\frac{1}{2}} u \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} c \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (2.19)$$

Si le milieu de vitesse c est constant, l'équation 2.19 s'obtient à partir de l'équation paraxiale d'ordre N définie par 2.18 en faisant $N = 1$, $\alpha_1^N = 0$, $\beta_1^N = \frac{1}{2}$. L'idée est alors de généraliser 2.19 par

$$\begin{cases} v = c^{-\frac{1}{2}} u \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N}{c} \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial t^2} - \alpha_n^N \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial \varphi^n}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2.20)$$

qui est l'équation paraxiale BEHJ [2] et qui satisfait aux 3 critères physiques définis dans la section 2.2. Cette équation correspond donc à l'approximation paraxiale d'ordre N en milieu hétérogène de l'équation des ondes et modélise la propagation dans le sens $z > 0$.

2.5 Formulation en fréquence

Dans toute la suite, nous utiliserons les équations paraxiales dans le domaine fréquentiel car, s'il est possible d'utiliser des schémas numériques en temps, les phénomènes de dispersion sont plus faciles

à contrôler dans le domaine fréquentiel et d'autre part, nous verrons que seul un petit nombre de fréquences suffit à reconstituer la solution en temps.

La convention que nous avons utilisée pour la transformée de Fourier est la suivante : Pour une fonction u définie en temps,

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.21)$$

où ω est la pulsation.

L'équation 2.20 se réécrit dans le domaine fréquentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\omega = c^{-\frac{1}{2}} u_\omega \\ \frac{\partial v_\omega}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} v_\omega - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega \beta_n^N}{c} \varphi_\omega^n \\ \frac{\omega^2}{c} \varphi_\omega^n + \alpha_n^N \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial \varphi_\omega^n}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial v_\omega}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (2.22)$$

3 Modélisation par équations paraxiales

Nous avons vu que les équations paraxiales permettent d'avoir une bonne approximation des solutions de l'équation des ondes mais uniquement de la partie montante ou de la partie descendante et donc, l'approximation paraxiale nécessite de définir un sens de propagation. Nous voulons définir une approximation paraxiale de l'équation des ondes acoustiques dans un milieu de vitesse hétérogène où l'équation des ondes s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, z, t) - \Delta u(x, z, t) = F^S(x, t) \delta(z - z_0) \quad \text{sur } R \times R \times R^+ \\ u(x, z, t = 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, z, t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où F^S est une source sismique avec $F^S(x, t) = 0 \quad t < 0$ qui sera typiquement de la forme $F^S(x, t) = f(t) \delta(x - x_S)$ où x_S désigne l'abscisse de la source et $f(t)$ une dérivée de gaussienne (par exemple).

La séparation du champ total $u(x, z, t)$ en un champ incident et un champ réfléchi est réalisée via l'approximation de Born de l'équation des ondes qui permet de donner un cadre mathématique à cette séparation en effectuant une linéarisation du problème 3.1 autour d'un milieu de référence. Nous pourrions alors définir de manière "naturelle" une approximation paraxiale pour chaque équation des ondes dont le champ incident et le champ réfléchi sont solutions.

3.1 Approximation de Born de l'équation des ondes

Le modèle de Born est basé sur la représentation du milieu de vitesse c en la somme d'un milieu de référence c_0 et un milieu de perturbation δc

$$c = c_0 + \delta c \quad (3.2)$$

Les milieux c_0 et δc doivent vérifier essentiellement 2 conditions (cf [5], [17]):

- Le milieu c_0 doit être suffisamment lisse c'est à dire qu'il doit varier lentement relativement à une longueur d'onde donnée. Il doit permettre de retrouver la cinématique du milieu considéré.
- Le milieu de perturbation δc doit, quant à lui, osciller fortement et être suffisamment petit devant c_0 .

On peut alors décomposer le champ total $u(x, z, t)$ en un champ incident $u_0(x, z, t)$ qui correspond à la propagation de la source dans le milieu c_0 en l'absence de perturbation et en un champ diffracté δu qui correspond à la modification de u_0 en réponse à δc .

$$u = u_0 + \delta u \quad (3.3)$$

Si on injecte 3.2 et 3.3 dans l'équation 3.1, on obtient :

$$\frac{1}{(c_0 + \delta c)^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta u_0 + \frac{1}{(c_0 + \delta c)^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \Delta \delta u = F^S(x, t) \delta(z - z_0) \quad (3.4)$$

Si on suppose que δc est petit, on peut écrire un développement limité de $\frac{1}{(c_0 + \delta c)^2}$ autour de c_0 :

$$\frac{1}{(c_0 + \delta c)^2} = \frac{1}{c_0^2} - 2 \frac{\delta c}{c_0^3} + O(\delta c^2) \quad (3.5)$$

On remplace alors $\frac{1}{(c_0 + \delta c)^2}$ par son développement limité dans 3.4, on obtient :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - 2 \frac{\delta c}{c_0^3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta u_0 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - 2 \frac{\delta c}{c_0^3} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \Delta \delta u = F^S(x, t) \delta(z - z_0) \quad (3.6)$$

Les champs u_0 et δu sont alors chacun solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta u_0 = F^S(x, t) \delta(z - z_0) \\ \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - 2 \frac{\delta c}{c_0^3} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \Delta \delta u = 2 \frac{\delta c}{c_0^3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.7)$$

L'équation donnant le champ diffracté δu est encore non linéaire par rapport à δu car il y a un terme qui contient le produit $\delta c \delta u$. Ici, la linéarisation consiste à négliger le terme faisant intervenir le produit $\delta c \delta u$. Il suffit alors de trouver une justification qui permette de le négliger pour que la linéarisation soit complète. En effet, lorsque δc est égal à 0, il est facile de voir que δu est aussi égal à 0 donc, il est raisonnable de penser que si δc est petit alors δu est lui aussi petit contrairement à

u_0 qui n'est pas affecté par la perturbation δc . Il est donc naturel de conclure que le terme $2\frac{\delta c}{c_0^3}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2}$ peut être négligé devant les autres termes intervenant dans l'équation 3.7.

L'inconnue u_0 modélisant le champ incident de l'équation des ondes complètes 3.1 généré par la source $F^S(x, t)\delta(z - z_0)$ est alors solution du problème d'équation d'onde

trouver $u_0 : R \times R \times R^+ \longrightarrow R$

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \Delta u_0 = F^S(x, t)\delta(z - z_0) \\ u_0(x, z, t = 0) = \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, z, t = 0) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

L'inconnue δu modélisant le champ diffracté de l'équation 3.1 est solution du problème d'équation d'onde

trouver $\delta u : R \times R \times R^+ \longrightarrow R$

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \Delta \delta u = F^R(x, z, t) \\ \delta u(x, z, t = 0) = \frac{\partial \delta u}{\partial t}(x, z, t = 0) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

avec $F^R(x, z, t) = 2\frac{\delta c(x, z)}{c_0^3}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}(x, z, t)$.

3.2 Approximation paraxiale de l'équation des ondes avec second membre

Dans le cadre de notre application, nous nous intéressons à la propagation d'un champ d'onde dans un milieu de vitesse $c_0(x, z)$ généré par une source $F^S(x, t)$ située à la surface c'est à dire en $z_0 = 0$. La modélisation par équation paraxiale s'écrit comme une équation différentielle du 1^{er} ordre en z et le terme source est défini par la trace du champ inconnu à la profondeur $z_0 = 0$. Pour l'équation des ondes, le terme source est au 2nd membre et le passage du 2nd membre de l'équation des ondes à la trace du champ pour l'équation paraxiale fait l'objet de cette section.

3.2.1 Approximation paraxiale sans second membre

La modélisation de la propagation du champ incident u_0 et du champ diffracté δu est donné via l'approximation de Born par les équations 3.8 et 3.9.

Le champ u_0 est solution d'une équation des ondes dans le milieu de référence c_0 induit par une source $F^S(x, t)$ en $z_0 = 0$. Nous allons alors définir l'approximation paraxiale de l'équation 3.8 en retenant uniquement le champ qui se propage suivant $z > 0$. Le sens de propagation étant défini, nous pouvons écrire l'approximation paraxiale d'ordre N de l'équation 3.8 **sans 2nd membre** :

déterminer $u_0 : [0, Z] \times R \times [0, T] \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = c_0^{\frac{1}{2}} v \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N}{c_0} \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} \\ \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial t^2} - \alpha_n^N \frac{\partial}{\partial x} \left(c_0 \frac{\partial \varphi^n}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(c_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ v(z = 0, x, t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Toute solution de l'équation 3.10 se propage donc dans le sens $z > 0$ lorsque t croît. Avec la convention sur la transformée de Fourier que nous avons prise, $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{i\omega t} dt$, la dérivée en temps $\frac{\partial}{\partial t}$ se transforme en la multiplication par $-i\omega$ dans le domaine fréquentiel et donc le problème se reformule en fréquence :

déterminer $u_{0\omega} : [0, Z] \times R \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{0\omega} = c_0^{\frac{1}{2}} v_\omega \\ \frac{\partial v_\omega}{\partial z} = \frac{i\omega}{c_0} v_\omega - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega \beta_n^N}{c_0} \varphi_\omega^n \\ \frac{\omega^2}{c_0} \varphi_\omega^n + \alpha_n^N \frac{\partial}{\partial x} \left(c_0 \frac{\partial \varphi_\omega^n}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(c_0 \frac{\partial v_\omega}{\partial x} \right) \\ v_\omega(z = 0, x) = 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

De la même manière, le champ δu est solution d'une équation des ondes dans le milieu de référence c_0 induit par le terme source $F^R(x, z, t) = 2 \frac{\delta c}{c_0^3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$ qui correspond à des réflecteurs situés en profondeur. On peut alors définir l'approximation paraxiale de l'équation 3.9 en retenant uniquement le champ qui se propage vers la surface c'est à dire vers $z < 0$. Nous pouvons alors écrire l'approximation paraxiale de 3.9 **sans 2nd membre** :

déterminer $\delta u : [0, Z] \times R \times [0, T] \longrightarrow R$

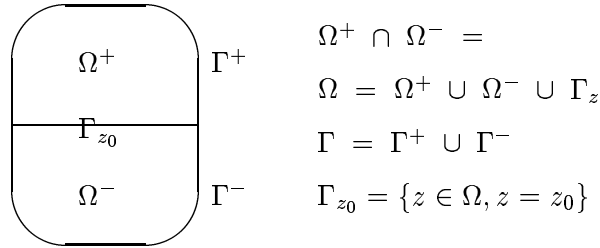
$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u = c_0^{\frac{1}{2}} v \\ -\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N}{c_0} \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} \\ \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial t^2} - \alpha_n^N \frac{\partial}{\partial x} \left(c_0 \frac{\partial \varphi^n}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(c_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ v(z = Z, x, t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Le problème se reformule en fréquence :

déterminer $\delta u_\omega : [0, Z] \times R \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u_\omega = c_0^{\frac{1}{2}} v_\omega \\ -\frac{\partial v_\omega}{\partial z} = \frac{i\omega}{c_0} v_\omega - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega \beta_n^N}{c_0} \varphi_\omega^n \\ \frac{\omega^2}{c_0} \varphi_\omega^n + \alpha_n^N \frac{\partial}{\partial x} \left(c_0 \frac{\partial \varphi_\omega^n}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(c_0 \frac{\partial v_\omega}{\partial x} \right) \\ v_\omega(z = Z, x) = 0 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

3.2.2 Transformation du second membre de l'équation des ondes



On considère un ouvert Ω constitué de 2 domaines Ω^+ et Ω^- symétriques par rapport à l'interface Γ_{z_0} sur lesquels on définit les 3 problèmes suivants :

– Trouver $u : \Omega \times]0, T[\longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = F(x, t) \delta(z - z_0) \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \\ u(x, z, t = 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, z, t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

– Trouver $u^+ : \Omega^+ \times]0, T[\longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2} - \Delta u^+ = 0 \\ u^+ = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^+ \\ -\frac{\partial u^+}{\partial z} = F(x, t)/2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{z_0} \\ u^+(x, z, t = 0) = \frac{\partial u^+}{\partial t}(x, z, t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

– Trouver $u^- : \Omega^- \times]0, T[\longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2} - \Delta u^- = 0 \\ u^- = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^- \\ \frac{\partial u^-}{\partial z} = F(x, t)/2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{z_0} \\ u^-(x, z, t = 0) = \frac{\partial u^-}{\partial t}(x, z, t = 0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

lemme

le champ u , solution du problème 3.14 dans Ω , peut s'écrire comme la somme du champ u^+ , solution du problème 3.15 dans Ω^+ , et du champ u^- , solution du problème 3.16 dans Ω^- :

$$u = u^+ + u^-$$

preuve

La démonstration est effectuée dans le cas $c_0 = 1$ simplement pour alléger l'écriture et la généralisation est immédiate.

- formulation variationnelle du problème 3.14:

On suppose u suffisamment régulière.

On prend une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(X, t) v(X) dX - \int_{\Omega} \Delta u(X, t) v(X) dX &= \int_{\Omega} F(x, t) \delta(z - z_0) v(X) dX \iff \\ \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(X, t) v(X) dX + \int_{\Omega} \nabla u(X, t) \nabla v(X) dX &= \int_{\Gamma_{z_0}} F(x, t) v(x) dx \quad \text{car } v = 0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned}$$

En introduisant la fonction $u(t) : X \in \Omega \rightarrow u(X, t) \in R$, la formulation variationnelle s'écrit

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(X, t) v(X) dX + \int_{\Omega} \nabla u(X, t) \nabla v(X) dX = \int_{\Gamma_{z_0}} F(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.17)$$

- formulation variationnelle du problème 3.15 :

On prend une fonction test $v \in V = \{v \in H^1(\Omega^+) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma^+\}$ et on intègre sur Ω^+

$$\int_{\Omega^+} \frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2}(X, t) v(X) dX - \int_{\Omega^+} \Delta u^+(X, t) v(X) dX = 0 \iff$$

$$\int_{\Omega^+} \frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2}(X, t) v(X) dX + \int_{\Omega^+} \nabla u^+(X, t) \nabla v(X) dX - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma_{z_0}} \frac{\partial u^+}{\partial n} v d\Gamma = 0$$

ce qui conduit à la formulation variationnelle

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega^+} u^+(X, t) V(X) dX + \int_{\Omega^+} \nabla u^+(X, t) \nabla v(X) dX = \int_{\Gamma_{z_0}} \frac{F(x, t)}{2} v(x) dx \quad \forall v \in V \quad (3.18)$$

- formulation variationnelle du problème 3.16 :

On prend une fonction test $v \in V = \{v \in H^1(\Omega^-) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma^-\}$ et on intègre sur Ω^-

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2}(X, t) v(X) dX - \int_{\Omega^-} \Delta u^-(X, t) v(X) dX &= 0 \iff \\ \int_{\Omega^-} \frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2}(X, t) v(X) dX + \int_{\Omega^-} \nabla u^-(X, t) \nabla v(X) dX - \int_{\Gamma^- \cup \Gamma_{z_0}} \frac{\partial u^-}{\partial n} v d\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

ce qui conduit à la formulation variationnelle

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega^-} u^-(X, t) V(X) dX + \int_{\Omega^-} \nabla u^-(X, t) \nabla v(X) dX = \int_{\Gamma_{z_0}} \frac{F(x, t)}{2} v(x) dx \quad \forall v \in V \quad (3.19)$$

On considère alors une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} v^+ = v / \Omega^+ \\ v^- = v / \Omega^- \end{cases}$$

et on fait la somme des 2 formulations variationnelles 3.18 et 3.19, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} (u^+(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^+} + u^-(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^-}) v(X) dX + \int_{\Omega} (\nabla u^+(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^+} + \nabla u^-(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^-}) v(X) dX = \\ \int_{\Gamma_{z_0}} F(x, t) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

On définit la fonction \tilde{u} par

$$\tilde{u}(X, t) = \begin{cases} u^+(X, t) \text{ sur } \Omega^+ \\ u^-(X, t) \text{ sur } \Omega^- \end{cases}$$

alors,

$$\tilde{u} = \begin{cases} \tilde{u}(X, t) = u^+(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^+} + u^-(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^-} \\ \nabla \tilde{u} = \nabla u^+(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^+} + \nabla u^-(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^-} + (u^+ - u^-)_{\Gamma_{z_0}} \delta(z - z_0) \end{cases}$$

Si on fait l'hypothèse que $u^+ = u^-$ sur Γ_{z_0} , alors $\nabla \tilde{u} = \nabla u^+(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^+} + \nabla u^-(X, t) \mathbf{1}_{\Omega^-}$.

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \nabla u^- \in L^2(\Omega^-) \\ \nabla u^+ \in L^2(\Omega^+) \end{cases} \implies \nabla \tilde{u} \in L^2(\Omega)$$

avec $\tilde{u} = 0$ sur Γ_{z_0} donc $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$.

\tilde{u} satisfait alors le même problème que u et on conclue par unicité que $u = \tilde{u}$ ce qui termine la démonstration du lemme.

Pour montrer que $u^+ = u^-$ sur Γ_{z_0} , il suffit d'utiliser le fait que Ω est symétrique par rapport à l'interface Γ_{z_0} . Dans ce cas, $u^-(x, z, t) = u^+(x, -z, t)$ est solution de 3.18 et de même pour $u^+(x, z, t) = u^-(x, -z, t)$ qui est solution de 3.19 donc, par continuité, $u^+ = u^-$ sur Γ_{z_0} .

Dans le cas de l'équation 3.8 donnant le champ incident $u0$, le 2^{nd} membre $F^S(x, t)\delta(z - z_0)$ correspond à une source sismique placée en surface en $z = z_0 = 0$.

$u0 = u0^+ \mathbf{1}_{\{z > z_0\}} + u0^- \mathbf{1}_{\{z < z_0\}}$ d'après le lemme. Le champ incident que nous allons modéliser est celui qui se propage dans la direction $z > 0$ c'est à dire $u0^-$. Dans la suite, le champ $u0$ sera assimilé à $u0^-$:

$$\begin{cases} u0(x, z, t) = u0^-(x, z, t) & \forall x \in R, \forall z \in [0, +\infty[\\ u0(x, z, t) = 0 & z < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ainsi, le problème 3.8 devient

trouver $u0 : R \times [0, +\infty[\times R \longrightarrow R$

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u0}{\partial t^2} - \Delta u0 = 0 \\ \frac{\partial u0}{\partial z} = F^S(x, t)/2 \quad \text{en } z = 0 \\ u0(x, z, t = 0) = \frac{\partial u0}{\partial t}(x, z, t = 0) = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Dans le cas de l'équation 3.9 donnant le champ diffracté δu , le 2^{nd} membre $F^R(x, z, t) = 2 \frac{\delta c(x, z)}{c_0^3} \frac{\partial^2 u0}{\partial t^2}(x, z, t)$ correspondant à des réflecteurs situés en profondeur peut se réécrire sous la forme :

$$F^R(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^R(x, \xi, t) \delta(z - \xi) d\xi$$

En introduisant la fonction $\delta \tilde{u}$ définie par

$$\delta u(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \tilde{u}(\xi; x, z, t) d\xi$$

l'équation 3.9 peut se réécrire à l'aide du champ $\delta \tilde{u}$:

$$\begin{cases} \delta u(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \tilde{u}(\xi; x, z, t) d\xi \\ \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta \tilde{u}}{\partial t^2} - \Delta \delta \tilde{u} = F^R(x, \xi, t) \delta(z - \xi) \\ \delta \tilde{u}(\xi; x, z, t = 0) = \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial t}(\xi; x, z, t = 0) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Nous pouvons ainsi appliquer le lemme à l'équation 3.22 donnant $\delta \tilde{u}$

$$\delta \tilde{u} = \delta \tilde{u}^+ \mathbf{1}_{\{z < \xi\}} + \delta \tilde{u}^- \mathbf{1}_{\{z > \xi\}}$$

Le champ diffracté que nous allons considérer est celui qui se propage en direction de la surface (vers $z < 0$) c'est à dire $\delta \tilde{u}^+$

$$\begin{cases} \delta \tilde{u}(\xi; x, z, t) = \delta \tilde{u}^+(\xi; x, z, t) \quad \forall x \in R, \quad z < \xi \\ \delta \tilde{u}(\xi; x, z, t) = 0 \quad z > \xi \end{cases} \quad (3.23)$$

On en déduit que le champ diffracté total δu que nous retenons est le champ δu^+ :

$$\delta u(x, z, t) = \delta u^+(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \tilde{u}^+(\xi; x, z, t) d\xi \quad (3.24)$$

Le problème 3.22 devient :

trouver $\delta u : R \times [0, +\infty[\times R \longrightarrow R$

$$\begin{cases} \delta u(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \tilde{u}(\xi; x, z, t) d\xi \\ \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \delta \tilde{u}}{\partial t^2} - \Delta \delta \tilde{u} = 0 \\ \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial z} = F^R(x, \xi, t)/2 \quad \text{en } z = \xi \\ \delta \tilde{u}(\xi; x, z, t = 0) = \frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial t}(\xi; x, z, t = 0) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

3.2.3 Approximation paraxiale avec second membre

On considère l'équation des ondes avec 2^{nd} membre dans un milieu de vitesse c_0 homogène

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, z, t) - \Delta u(x, z, t) = F^O(x, t) \delta(z - z_0) \quad (3.26)$$

La solution u de ce problème peut s'écrire d'après le paragraphe précédent comme la somme d'un champ montant u^+ ($z < z_0$) et d'un champ descendant u^- ($z > z_0$)

où u^+ est solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2}(x, z, t) - \Delta u^+(x, z, t) = 0 \\ -\frac{\partial u^+}{\partial z} = F^O(x, t)/2 \quad \text{en } z = z_0 \end{cases} \quad (3.27)$$

et u^- solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2}(x, z, t) - \Delta u^-(x, z, t) = 0 \\ \frac{\partial u^-}{\partial z} = F^O(x, t)/2 \quad \text{en } z = z_0 \end{cases} \quad (3.28)$$

La relation de dispersion de l'équation 3.26 homogène s'écrit classiquement

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad (3.29)$$

De cette équation, on a vu que l'on pouvait définir 2 relations correspondant à des ondes se propageant

- dans la direction $z > 0$: $k_z = \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{k_x^2 c_0^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
- dans la direction $z < 0$: $k_z = -\frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{k_x^2 c_0^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Après une transformée de fourier inverse en la variable d'espace x , on obtient 2 équations différentielles du 1^{er} ordre en z

$$\frac{\partial u}{\partial z}(k_x, z, \omega) = i \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{k_x^2 c_0^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} u(k_x, z, \omega) \quad z > z_0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(k_x, z, \omega) = -i \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{k_x^2 c_0^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} u(k_x, z, \omega) \quad z < z_0 \quad (3.31)$$

On ajoute à ces 2 équations une condition de radiation à l'infini qui permet d'assurer l'unicité de la solution dans un domaine non borné en imposant aux amplitudes de décroître lorsque z croît ce qui permet de prendre en compte l'atténuation géométrique.

Si on appelle \mathbf{P} l'opérateur défini par son symbole

$$\mathbf{P} = \frac{\omega}{c_0} \left(1 - \frac{k_x^2 c_0^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'approximation paraxiale est obtenue en faisant une approximation de l'opérateur \mathbf{P} par une décomposition en fractions rationnelles suivant la méthode de Padé.

Ainsi, si on considère une équation paraxiale avec second membre modélisant, par exemple, un champ descendant qui s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = i \mathbf{P} u + F^P(k_x, \omega) \delta(z - z_0) \\ u = 0 \quad \text{en } z = z_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

cette équation se réécrit de manière équivalente sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = i \mathbf{P} u \\ u = F^P(k_x, \omega) \quad \text{en } z = z_0 \end{cases} \quad (3.33)$$

L'équation 3.28 écrite en $z = z_0$ après transformée de Fourier en x et en temps t s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z = z_0) = F^O(k_x, \omega)/2$$

L'équation 3.33 définit l'approximation paraxiale de l'équation 3.28 qui s'écrit en $z = z_0$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z = z_0) = i \mathbf{P} u(z = z_0)$$

avec $u(z = z_0) = F^P(k_x, \omega)$

On en déduit que le terme source pour l'équation des ondes F^O est relié au terme source de l'approximation paraxiale F^P approchant le champ montant ou descendant par la relation

$$F^P(k_x, \omega) = -i \mathbf{P}^{-1} \frac{1}{2} F^O(k_x, \omega) \quad \text{pour } z = z_0$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$F^P(k_x, z = z_0, \omega) = -i \frac{c_0}{\omega} \left(1 - \frac{k_x^2 c_0^2}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} F^O(k_x, z = z_0, \omega) \quad (3.34)$$

Il est possible de retrouver dans la littérature une formulation équivalente à 3.34 (Graves et Clayton [13], Wapenaar [18], Charara et Tarantola [6]). Cette formulation est en fait difficile à implémenter car elle fait intervenir l'inverse de l'opérateur \mathbf{P} et il s'agit maintenant de voir comment on peut l'utiliser avec les équations paraxiales.

3.2.4 Reformulation du problème

Ayant établi le lien entre le 2^{nd} membre pour l'équation des ondes et son passage dans l'équation paraxiale, nous pouvons alors définir l'approximation paraxiale des problèmes 3.8 et 3.9.

Le problème 3.8 se réécrit comme un problème d'évolution en profondeur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial z}(k_x, z, \omega) = i \mathbf{P} u_0(k_x, z, \omega) - i \mathbf{P}^{-1} \frac{F^S}{2}(k_x, \omega) \delta(z - z_0) \\ u_0 = 0 \quad z < z_0 \end{cases} \quad (3.35)$$

On peut le réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial z}(k_x, z, \omega) = i \mathbf{P} \left(u_0(k_x, z, \omega) - \mathbf{P}^{-2} \frac{F^S}{2}(k_x, \omega) \delta(z - z_0) \right) \\ u_0 = 0 \quad z < z_0 \end{cases} \quad (3.36)$$

En posant

$$\begin{aligned} g(k_x, \omega) &= -\mathbf{P}^{-2} \frac{F^S}{2}(k_x, \omega) \quad \text{en } z = z_0 \\ \iff g(k_x, \omega) &= -i \frac{c_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{k_x^2 c_0^2}{\omega^2} \right) \frac{F^S}{2}(k_x, \omega) \quad \text{en } z = z_0 \\ \iff \frac{\omega^2}{c_0} g(k_x, \omega) - k_x^2 c_0 g(k_x, \omega) &= -c_0 \frac{F^S}{2}(k_x, \omega) \quad \text{en } z = z_0 \end{aligned}$$

le problème se reformule de la manière suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial z}(k_x, z, \omega) = i \mathbf{P} (u_0(k_x, z, \omega) + g(k_x, \omega) \delta(z - z_0)) \\ \frac{\omega^2}{c_0} g(k_x, \omega) - k_x^2 c_0 g(k_x, \omega) = -c_0 \frac{F^S}{2}(k_x, \omega) \quad \text{en } z = z_0 \\ u_0 = 0 \quad z < z_0 \end{cases} \quad (3.37)$$

On est alors amené à résoudre une équation de Helmholtz en dimension 1 pour trouver g qui n'entraîne qu'un surcoût informatique marginal. L'approximation paraxiale de l'opérateur \mathbf{P} et une transformée de fourier inverse en espace permettent de reformuler le problème qui devient

Trouver $u_0 : [0, Z] \times R \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = c_0^{\frac{1}{2}} v \\ \frac{\partial v}{\partial z}(x, z, \omega) = \frac{i\omega}{c_0}(v + g\delta(z - z_0)) - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega\beta_n^N}{c_0} \varphi^n; \\ \frac{\omega^2}{c_0} \varphi^n + \frac{\partial}{\partial x} c_0 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_n^N \varphi^n + v + g\delta(z - z_0)) = 0 \\ \frac{\omega^2}{c_0} g(x, \omega) + \frac{\partial}{\partial x} c_0 \frac{\partial}{\partial x} g(x, \omega) = -c_0 \frac{F^S}{2}(x, \omega) \quad \text{en } z = z_0 \\ v = 0 \quad z < z_0 \end{array} \right. \quad (3.38)$$

On fait alors le changement de variable $v_0 = v + g\delta(z - z_0)$

Trouver $u_0 : [0, Z] \times R \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = c_0^{\frac{1}{2}} v \\ v = v_0 - g\delta(z - z_0) \\ \frac{\partial v_0}{\partial z}(x, z, \omega) = \frac{i\omega}{c_0} v_0 - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega\beta_n^N}{c_0} \varphi^n + \frac{\partial}{\partial z} (g\delta(z - z_0)); \\ \frac{\omega^2}{c_0} \varphi^n + \frac{\partial}{\partial x} c_0 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_n^N \varphi^n + v_0) = 0 \\ \frac{\omega^2}{c_0} g(x, \omega) + \frac{\partial}{\partial x} c_0 \frac{\partial}{\partial x} g(x, \omega) = -c_0 \frac{F^S}{2}(x, \omega) \quad \text{en } z = z_0 \\ v_0 = 0 \quad z < z_0 \end{array} \right. \quad (3.39)$$

De la même manière, nous pouvons écrire le problème 3.9 comme un problème d'évolution en profondeur à l'aide de sa reformulation 3.25

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \tilde{u}(\xi; x, z, \omega) d\xi \\ -\frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial z}(\xi; k_x, z, \omega) = i \mathbf{P} \delta \tilde{u}(\xi; k_x, z, \omega) - i \mathbf{P}^{-1} \frac{F^R}{2}(k_x, \xi, \omega) \delta(z - \xi) \\ \delta \tilde{u} = 0 \quad z > \xi \end{array} \right. \quad (3.40)$$

En posant

$$g(k_x, \omega) = -\mathbf{P}^{-2} \frac{F^R}{2}(k_x, \xi, \omega) \quad \text{en } z = \xi$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\omega^2}{c_0} g(k_x, \omega) - k_x^2 c_0 g(k_x, \omega) = -c_0 \frac{F^R}{2}(k_x, \xi, \omega) \quad \text{en } z = \xi$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \tilde{u}(\xi; x, z, \omega) d\xi \\ -\frac{\partial \delta \tilde{u}}{\partial z}(\xi; k_x, z, \omega) = i \mathbf{P}(\delta \tilde{u}(\xi; k_x, z, \omega) + g(k_x, \omega) \delta(z - \xi)) \\ \frac{\omega^2}{c_0} g(k_x, \omega) - k_x^2 c_0 g(k_x, \omega) = -c_0 \frac{F^R}{2}(k_x, \xi, \omega) \quad \text{en } z = \xi \\ \delta \tilde{u} = 0 \quad z > \xi \end{array} \right. \quad (3.41)$$

L'opérateur \mathbf{P} étant linéaire et indépendant du paramètre ξ , on peut alors, par convolution, reformuler directement le problème en la variable δu en intégrant par rapport à ξ

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \delta u}{\partial z}(k_x, z, \omega) = i \mathbf{P}(\delta u(k_x, z, \omega) + g(k_x, z, \omega)) \\ \frac{\omega^2}{c_0} g(k_x, z, \omega) - k_x^2 c_0 g(k_x, z, \omega) = -c_0 \frac{F^R}{2}(k_x, z, \omega) \\ \delta u = 0 \quad z > Z \end{array} \right. \quad (3.42)$$

En effectuant, comme précédemment, l'approximation paraxiale de l'opérateur \mathbf{P} et après avoir fait le changement de variable $\delta v = \delta u + g$, le problème s'écrit alors

Trouver $\delta u : [0, Z] \times R \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u = c_0^{\frac{1}{2}} \delta w \\ \delta w = \delta v - g \\ -\frac{\partial \delta v}{\partial z}(x, z, \omega) = \frac{i\omega}{c_0} \delta v - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega \beta_n^N}{c_0} \varphi^n + \frac{\partial}{\partial z} g \\ \frac{\omega^2}{c_0} \varphi^n + \frac{\partial}{\partial x} c_0 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_n^N \varphi^n + \delta v) = 0 \\ \frac{\omega^2}{c_0} g(x, z, \omega) + \frac{\partial}{\partial x} c_0 \frac{\partial}{\partial x} g(x, z, \omega) = -c_0 \frac{F^R}{2}(x, z, \omega) \\ \delta v = 0 \quad z > Z \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Dans le cas des 2 problèmes 3.39 et 3.43, on est amené à résoudre une équation paraxiale avec second membre.

Les schémas classiques de discrétisation des équations paraxiales étant traités comme des problèmes d'évolution en z où le terme source est donné en condition initiale, nous serons amené, lors de la discrétisation, à considérer les fonctions g constantes par maille suivant z .

En effet, la dérivée d'une fonction constante par maille s'exprime à l'aide de fonctions de Dirac qui permettent de traiter le second membre comme un saut sur chaque interface $k\Delta z$ et, de plus, ceci permettra de justifier le splitting de l'opérateur faisant intervenir la somme des N problèmes.

3.3 Méthodes des approximations de Padé complexes

Les équations paraxiales sont basées sur l'approximation de l'opérateur \mathbf{P} de symbole

$$\mathbf{P} = \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

qui renvoie à la relation de dispersion de l'équation des ondes $k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

Si on considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z}(k_x, z, \omega) = i \mathbf{P} u(k_x, z, \omega) \\ u(k_x, z, \omega) = u_0(k_x, \omega) \quad z = z_0 \end{cases} \quad (3.44)$$

les modes correspondant à

$$\left| \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} \right| > 1$$

sont des modes exponentiellement décroissants ou modes évanescents pour l'équation des ondes mais deviennent des modes propagatifs pour les équations paraxiales.

En effet, l'approximation de Padé classique d'ordre N de l'opérateur \mathbf{P} s'écrit

$$1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N X}{1 - \alpha_n^N X} \quad \text{avec} \quad X = \frac{ck_x}{\omega} \quad (3.45)$$

et fait apparaitre des modes propagatifs parasites (cf figure 3.1) représentés par des branches infinies correspondant à des asymptotes aux points

$$\frac{k_x c}{\omega} = \pm \left(\frac{1}{\alpha_n^N} \right)^{\frac{1}{2}} \quad n = 1, \dots, N.$$

Bamberger et al [2] ont montré que si le champ u_0 initial ne contenait que des modes propagatifs alors la solution issue de l'approximation de Padé converge lorsque N tend vers $+\infty$ vers la solution exacte mais ce n'est pas le cas en général car u_0 contient à la fois des modes propagatifs et évanescents.

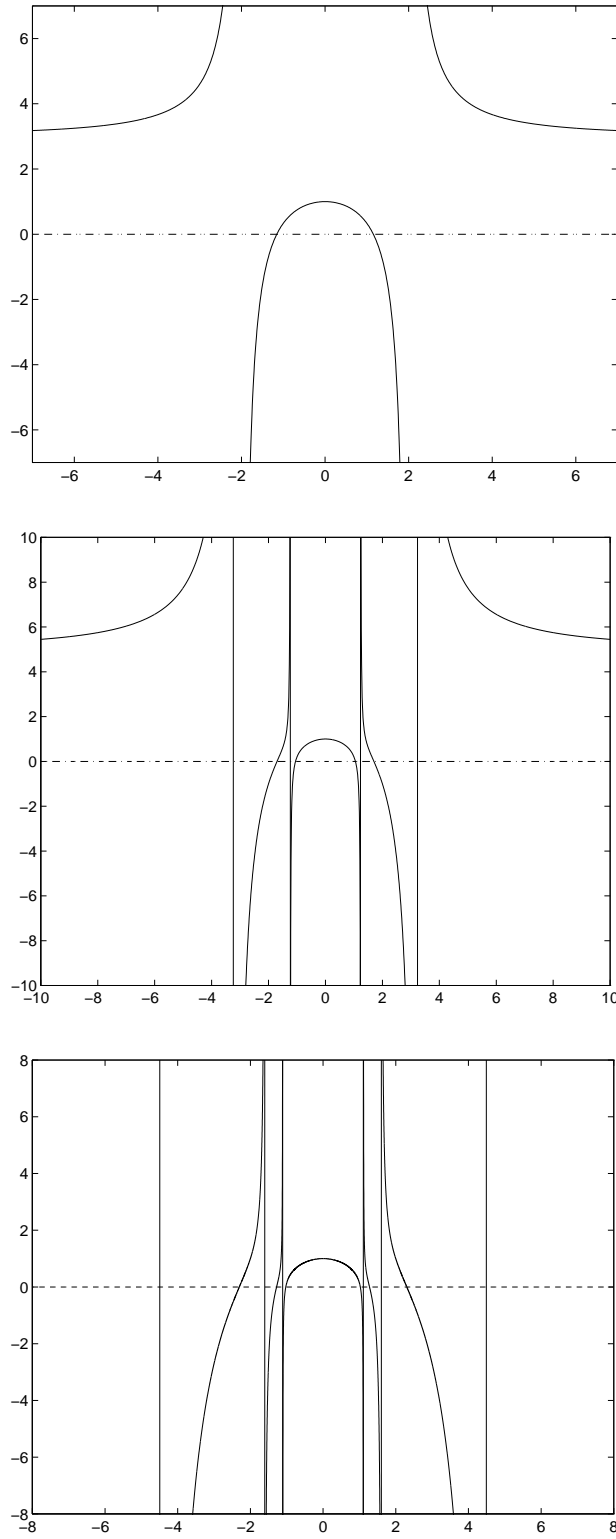


FIG. 3.1 – *Relation de dispersion Haut : équation 45 degres $N=1$. Milieu : équation 60 degres $N=2$. Bas : $N=3$.*

L'objectif ici est de présenter une méthode quelque peu originale pour éliminer les modes évanescents en considérant une approximation suivant la méthode de Padé définie à partir de nombres complexes, cette méthode étant basée sur les travaux de Lu et Mc Laughlin [16]. On peut aussi citer les travaux de Lee et Suh [15] qui ont définis des coefficients de Padé optimisés pour améliorer l'approximation de la relation de dispersion. Cette méthode est basée sur la minimisation de l'erreur de dispersion par une méthode de moindres carrés.

Les coefficients α_n^N et β_n^N étant réels, l'approximation paraxiale ne peut donner lieu qu'à des modes propagatifs qui transforme donc les modes évanescents pour l'équation des ondes en modes propagatifs.

L'idée est alors de considérer la même approximation de Padé de l'opérateur $(1 + X)^{\frac{1}{2}}$ en le décomposant sous forme de fractions rationnelles simples

$$R_N(X) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N X}{1 + \alpha_n^N X} \quad (3.46)$$

où les coefficients α_n^N et β_n^N seront, cette fois-ci, complexes. De plus, on souhaite que la nouvelle décomposition ait les propriétés suivantes

- l'approximation rationnelle $R_N(X)$ doit être une bonne approximation de $(1 + X)^{\frac{1}{2}}$ pour $X \geq -1$
- la partie imaginaire de $R_N(X)$ doit être positive pour $X < -1$ afin d'éliminer les modes évanescents et, d'autre part, il est nécessaire qu'elle soit le plus proche possible de zéro pour $X \geq -1$ sinon on introduit une erreur sur l'amplitude pour les modes propagatifs.

Bien sûr, dans le cas de l'approximation de Padé classique définie dans le chapitre d'introduction aux équations paraxiales, les coefficients α_n^N et β_n^N sont réels et donc, on a

$$\text{Im } R_N(X) = 0 \quad \forall X.$$

Rappelons la construction de cette approximation. On considère la fonction

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{2}} - 1$$

et on se propose de construire une approximation correcte de f pour $x \geq -1$ et à partie imaginaire positive pour $x < -1$. La fonction f satisfait

$$f(x) = \frac{x}{2 + f(x)}$$

et on peut alors définir une suite $\{f_m\}$ par :

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_{j+1}(x) = \frac{x}{2 + f_j(x)} \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.47)$$

La suite $\{f_m\}$ permet de définir une approximation de f d'ordre supérieur mais conduit à des équations aux dérivées partielles d'ordre élevées donc d'un usage pratique difficile. Halpern [14] et Zhang [19] ont réécrit cette approximation en remarquant qu'une fraction rationnelle peut être décomposée en une somme de fractions simples ce qui a été utilisé abondamment pour les conditions aux limites absorbantes. L'approximation de Padé utilisée dans [14, 19] permet d'écrire la suite $\{f_m\}$ en une somme de fractions simples sous la forme

$$f_{2N+1}(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N x}{1 + \alpha_n^N x} = R_N(x) - 1 \quad (3.48)$$

où les coefficients sont donnés par

$$\begin{cases} \alpha_n^N = \cos^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right) \\ \beta_n^N = \frac{2}{2N+1} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right) \end{cases} \quad (3.49)$$

L'idée de Lu [16] a été de considérer la même suite $\{f_m\}$ et de commencer la récurrence, non pas avec $f_1(x) = 0$, mais plutôt avec un nombre complexe imaginaire pur :

$$f_1(x) = i\beta \quad \text{avec } \beta > 0$$

On peut alors montrer (cf [16]) que la suite $\{f_m\}$ converge vers f pour $x \geq -1$ et que les dérivées jusqu'à l'ordre m de f_{m+1} et de f coïncident en $x = 0$.

On montre aussi que la fonction f_m est comprise entre 2 fonctions B^- et B^+ positive pour $x < -1$

$$B^-(x) \leq f_m(x) \leq B^+(x)$$

où

$$B^\pm(x) = \frac{\beta}{2} - \frac{x}{2\beta} \pm \left(1 + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{x}{2\beta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

B^+ est clairement une fonction positive, de même pour B^- qui se réécrit

$$B^-(x) = -\frac{1+x}{B^+(x)}$$

Ainsi, pour $\beta > 0$, la suite $\{f_m\}$ a les bonnes propriétés demandées c'est à dire qu'elle produit une approximation rationnelle de f avec une partie imaginaire positive pour $x < -1$.

Dans le cadre qui nous intéresse, il est nécessaire de réécrire l'approximation comme une somme de fractions rationnelles simples. On considère alors la même décomposition qu'en 3.48

$$f_{2N+1} = \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N x}{1 + \alpha_n^N x} \quad (3.50)$$

les coefficients α_n^N et β_n^N , complexes cette fois-ci, peuvent se calculer relativement facilement. Si on introduit la matrice tridiagonale de taille $2N \times 2N$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1-t & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } t = \frac{i\beta}{2+i\beta} \quad (3.51)$$

les valeurs propres de T sont distinctes et peuvent s'écrire sous la forme

$$\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_N.$$

et les coefficients α_n^N s'expriment à partir des valeurs propres λ de la matrice T par la formule

$$\alpha_n^N = \frac{\lambda_n^2}{4} \quad n = 1, \dots, N \quad (3.52)$$

On peut aussi montrer que les coefficients α_n^N (cf [16]) sont les zéros de la fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(2n\theta)}{z - \cos^2(n\theta)} + (2N+1)\left(1 - \frac{2i}{\beta}\right) \quad \text{avec } \theta = \frac{\pi}{2N+1}. \quad (3.53)$$

Une fois les α_n^N calculés, on détermine les coefficients β_n^N en résolvant le système de Vandermonde suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_{1N} & \alpha_{2N} & \alpha_{3N} & \dots & \alpha_{NN} \\ \alpha_{1N}^2 & \alpha_{2N}^2 & \alpha_{3N}^2 & \dots & \alpha_{NN}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1N}^{N-1} & \alpha_{2N}^{N-1} & \alpha_{3N}^{N-1} & \dots & \alpha_{NN}^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^N \\ \beta_2^N \\ \beta_3^N \\ \vdots \\ \beta_N^N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

avec la notation $\alpha_{iN}^n = (\alpha_i^N)^n$ et où les coefficients du 2^{nd} membre g_m $m = 1, \dots, N$ sont définis par

$$g_m = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{3}{2i}\right) \quad (3.55)$$

Du point de vue numérique, le tableau qui suit donne la valeur des coefficients α_n^N et β_n^N pour différentes valeurs du paramètre β qui correspond à la valeur initiale de la récurrence définie par la suite $\{f_m\}$.

Les coefficients ont été calculés en résolvant le système 3.52 pour α_n^N et le système de Vandermonde 3.54 pour β_n^N . Des valeurs plus précises peuvent être obtenues en appliquant une méthode de Newton au système 3.53.

Les figures 3.2 et 3.3 représentent les relations de dispersion pour différentes valeurs de β correspondant à l'équation paraxiale 60° (2 fractions).

On constate que plus le paramètre β augmente et plus la partie imaginaire de la relation de dispersion prend des valeurs importantes, c'est ce qui permet en fait de tuer les ondes évanescences ou tout au moins de les atténuer fortement.

L'idée serait alors de choisir le paramètre β suffisamment grand afin d'éliminer toutes les ondes évanescences mais, on constate numériquement que pour $\beta > 3$, on introduit de la dispersion numérique dans le schéma présenté plus loin. D'autre part, on peut remarquer que pour $\beta > 2$ les courbes de dispersion ne varient plus de manière importante, c'est pourquoi il nous a semblé raisonnable de choisir le paramètre β qui entraîne le moins de dispersion numérique tout en atténuant bien les ondes évanescences ce qui correspond à choisir β dans l'intervalle

$$\beta \in [1, 3].$$

Les figures 3.4 et 3.5 montrent des instantannés de propagation d'un point source dans un milieu homogène obtenus avec l'équation paraxiale 45° et 60° en utilisant le schéma de discrétisation qui fera l'objet de la section suivante. Ces figures montrent comment l'approximation de Padé complexe peut apporter une réponse quant à l'élimination des modes évanescents de l'équation des ondes.

Les résultats sont tout à fait satisfaisants car, d’une part les modes évanescents sont pratiquement totalement éliminés, et d’autre part les amplitudes sont conservées dans le domaine d’approximation où l’équation paraxiale est définie.

L’intérêt principal de cette méthode basée sur les coefficients complexes est, outre le fait d’éliminer les modes évanescents, qu’elle n’entraîne aucun surcoût informatique dans la mise en oeuvre numérique des équations paraxiales et qu’elle doit permettre une extension “naturelle” au cas tridimensionnel.

Valeur de β	1 Fraction		2 Fractions		3 Fractions	
	coef. α_n^N	coef. β_n^N	coef. α_n^N	coef. β_n^N	coef. α_n^N	coef. β_n^N
$\beta=0$	0.25	0.5	0.654508	0.138196	0.811744	0.053787
			0.095491	0.361803	0.388739	0.174645
					0.049515	0.271566
$\beta=0.5$	$0.23529 - 0.05882i$	0.5	$0.64266 - 0.04199i$	$0.14206 + 0.02180i$	$0.80504 - 0.01963i$	$0.05597 + 0.00811i$
			$0.09263 - 0.01683i$	$0.35794 - 0.02180i$	$0.38155 - 0.03256i$	$0.17432 + 0.00729i$
					$0.04871 - 0.00664i$	$0.26971 - 0.01541i$
$\beta=1$	$0.20000 - 0.10000i$	0.5	$0.61525 - 0.06885i$	$0.15289 + 0.04022i$	$0.79101 - 0.02983i$	$0.06133 + 0.01350i$
			$0.08475 - 0.03115i$	$0.34711 - 0.04022i$	$0.36263 - 0.05739i$	$0.17450 + 0.01634i$
					$0.04636 - 0.01278i$	$0.26417 - 0.02984i$
$\beta=1.5$	$0.16000 - 0.12000i$	0.5	$0.58622 - 0.07873i$	$0.16810 + 0.05255i$	$0.77831 - 0.03151i$	$0.06718 + 0.01539i$
			$0.07378 - 0.04127i$	$0.33190 - 0.05255i$	$0.33896 - 0.07053i$	$0.17759 + 0.02668i$
					$0.04273 - 0.01796i$	$0.25523 - 0.04207i$
$\beta=2$	$0.12500 - 0.12500i$	0.5	$0.56299 - 0.07809i$	$0.18399 + 0.05827i$	$0.76955 - 0.02944i$	$0.07177 + 0.01508i$
			$0.06201 - 0.04691i$	$0.31601 - 0.05827i$	$0.31720 - 0.07371i$	$0.18430 + 0.03585i$
					$0.03826 - 0.02185i$	$0.24392 - 0.05093i$
$\beta=4$	$0.05000 - 0.10000i$	0.5	$0.52127 - 0.05508i$	$0.22359 + 0.05021i$	$0.75614 - 0.01897i$	$0.07955 + 0.01032i$
			$0.02873 - 0.04492i$	$0.27641 - 0.05021i$	$0.27275 - 0.05541i$	$0.21745 + 0.04440i$
					$0.02111 - 0.02562i$	$0.20300 - 0.05472i$

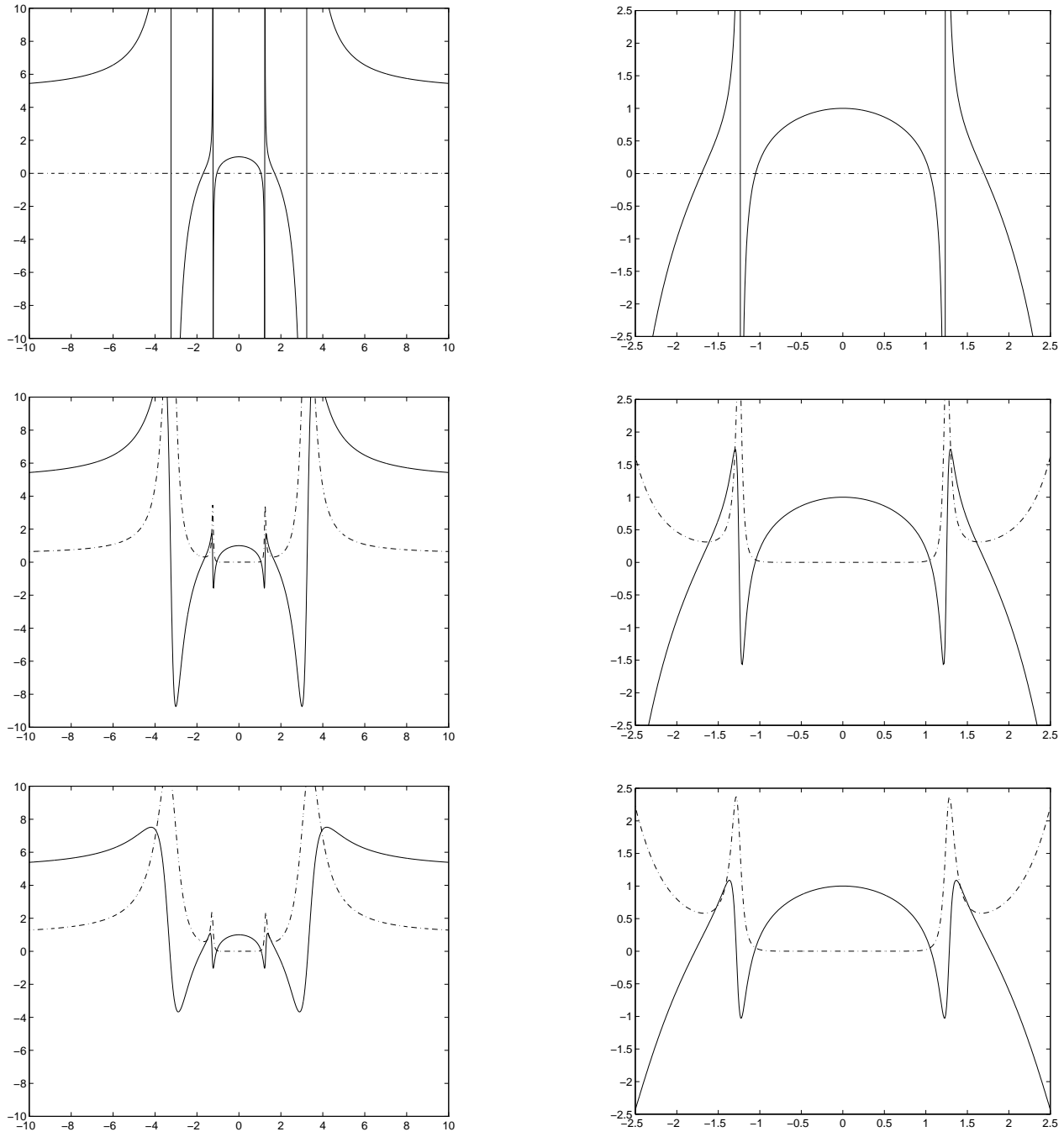


FIG. 3.2 – Relation de dispersion pour différentes valeurs de β correspondant à l'équation paraxiale 60° ($N = 2$). Trait plein : partie réelle. Trait pointillé : partie imaginaire. Haut : $\beta = 0$ Milieu : $\beta = 0.5$ Bas : $\beta = 1$

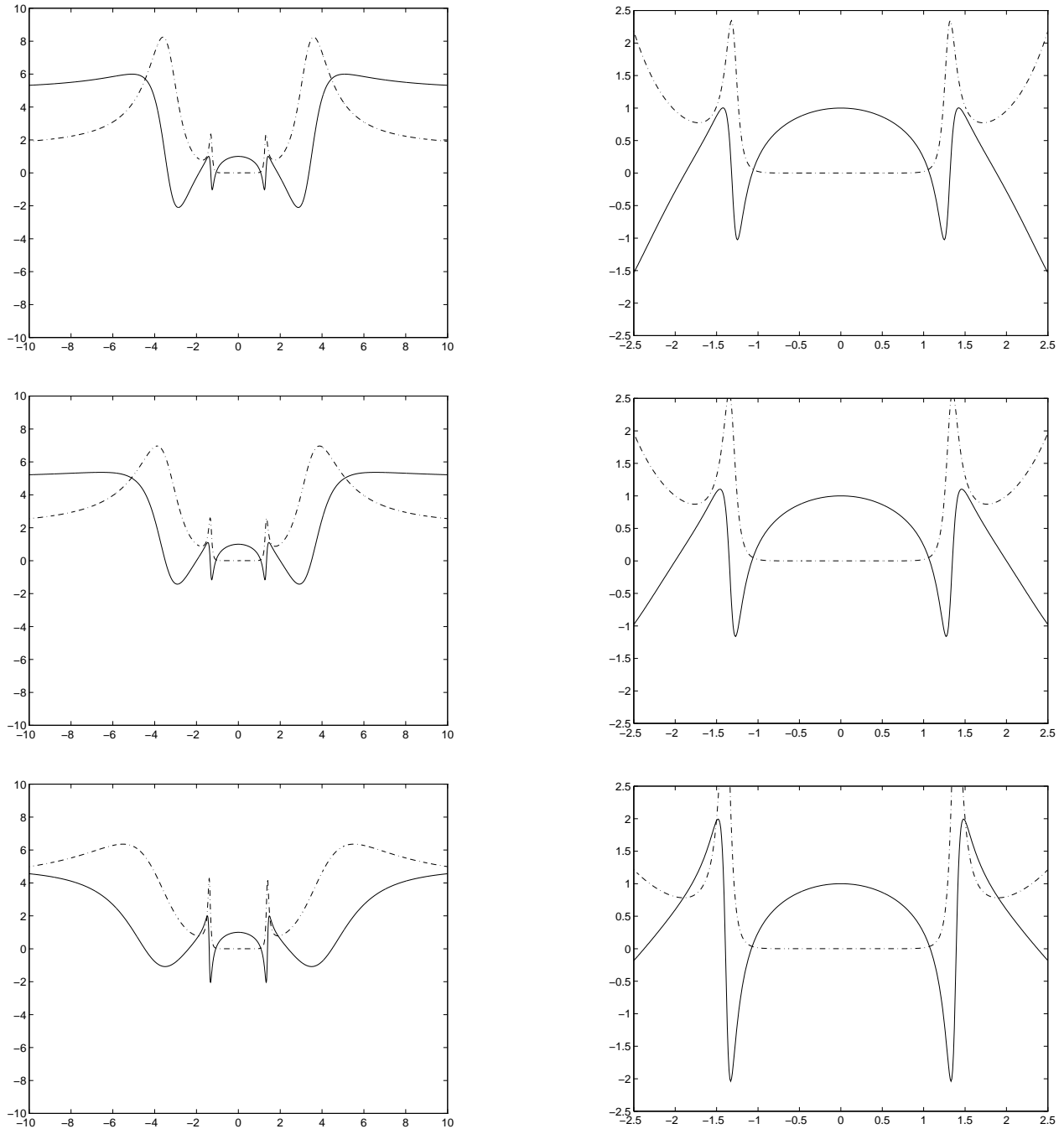


FIG. 3.3 – Relation de dispersion pour différentes valeurs de β correspondant à l'équation paraxiale 60° ($N = 2$). Trait plein : partie réelle. Trait pointillé : partie imaginaire. Haut : $\beta = 1.5$ Milieu : $\beta = 2$ Bas : $\beta = 4$

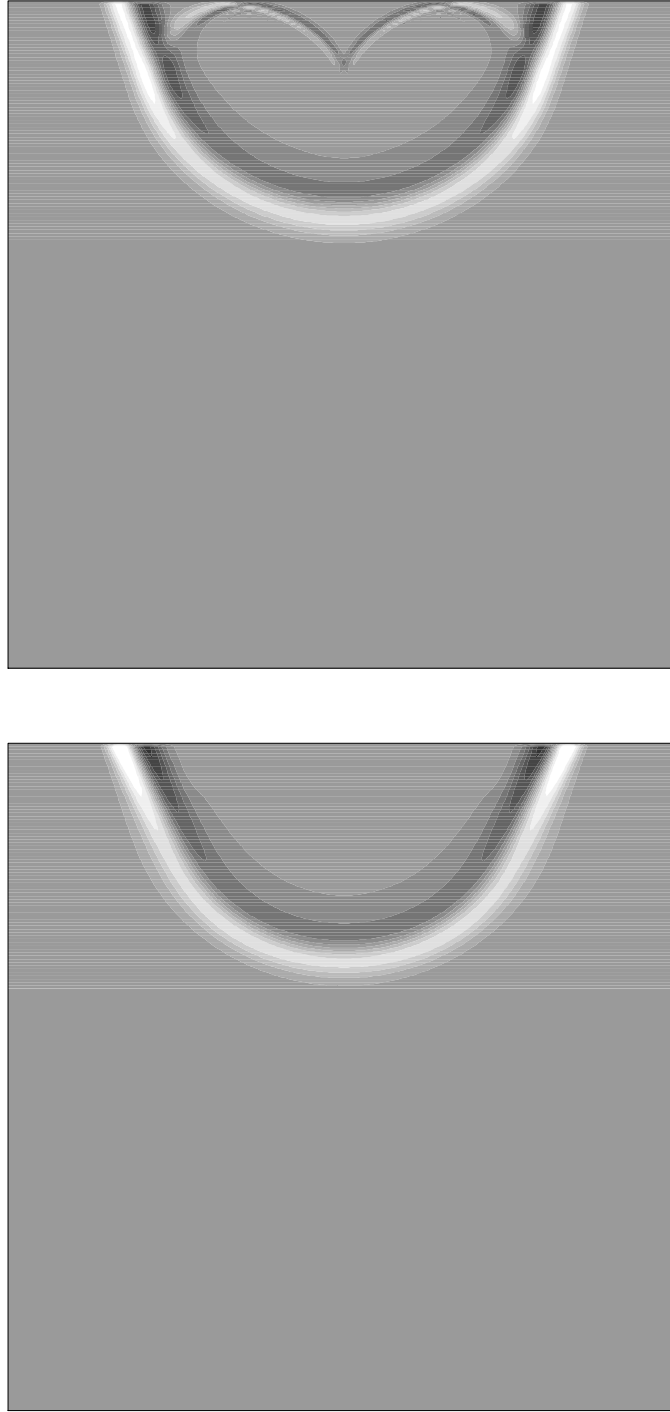


FIG. 3.4 – Propagation par l'équation paraxiale 45 degrés d'un point source situé à la surface ($z=0$) et au milieu du domaine ($x_s = L/2$) pour un milieu de vitesse homogène 2000 m/s. Haut: Approximation de Padé classique. Bas: Approximation de Padé complexe avec $\beta = 2$.



FIG. 3.5 – Propagation par l'équation paraxiale 60 degrés d'un point source situé à la surface ($z = 0$) et au milieu du domaine ($xs = L/2$) pour un milieu de vitesse homogène 2000 m/s. Haut : Approximation de Padé classique. Bas : Approximation de Padé complexe avec $\beta = 2$.

3.4 Conditions aux limites: Utilisation de couches absorbantes (PML)

En pratique, nous envisageons de résoudre les problèmes 3.39 et 3.43 sur un domaine borné sur lequel nous définirons un maillage régulier ce qui a pour effet d'introduire des bords latéraux artificiels qui n'ont en fait aucune réalité physique. Les travaux récents de Collino [10] ont permis ici d'envisager un nouveau type de conditions aux limites appelées couches absorbantes ou couches PML. Elles ont été introduites par Béranger [3] pour l'électromagnétisme et adaptées aux équations paraxiales par Collino [10]. Elles possèdent la propriété de ne générer aucune réflexion à l'interface entre le milieu physique et les couches latérales ce qui va permettre d'utiliser un paramètre d'atténuation σ fort et donc de considérer des couches d'épaisseur δ relativement réduite.

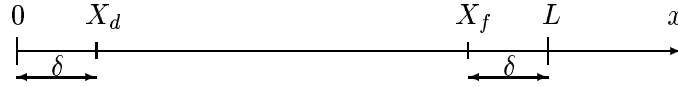
On considère un problème général où u est solution d'une équation paraxiale d'ordre N dans le domaine fréquentiel sur l'intervalle $[0, Z] \times R$, le problème s'écrit

Trouver $u: [0, Z] \times R \longrightarrow R$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{i\omega}{c}u - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega\beta_n^N}{c}\varphi^n \\ \frac{\omega^2}{c}\varphi^n + \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_n^N \varphi^n + u) \right) = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

où $u(z = 0, x) = u_0(x)$ est supposé donné.

On s'intéresse alors à la restriction de ce problème sur l'intervalle $[0, Z] \times [X_d, X_f]$ ce qui introduit 2 bords latéraux en $x = X_d$ et $x = X_f$. Sur chacun de ces bords latéraux, on va définir des couches absorbantes d'épaisseur δ qui vont permettre d'absorber l'onde et le problème va se reformuler sur le domaine $[0, Z] \times [0, L]$



La construction de couches absorbantes qui est basée sur le changement de variable complexe

$$\tilde{x} = x - \frac{i}{\omega} \int_0^x \sigma(s) ds \quad (3.57)$$

consiste (cf [10]) à effectuer formellement la substitution

$$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \frac{i\omega}{i\omega + \sigma(x)c} \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.58)$$

dans l'équation 3.56 où la fonction σ représente le coefficient d'atténuation dans la couche PML et est définie par

$$\sigma(x) = \begin{cases} \geq 0 & 0 < x < \delta \\ 0 & \delta < x < L - \delta \\ \geq 0 & L - \delta < x < L \end{cases} \quad (3.59)$$

Ainsi, la construction d'un modèle de couches absorbantes est très facile à réaliser et on peut noter que ce changement de variable ne modifie pas la solution dans le domaine d'intérêt $x \in [X_d, X_f]$ pour lequel $\sigma \equiv 0$; En effet, pour $\sigma = 0$

$$\frac{i\omega}{i\omega + \sigma(x)c} = 1$$

et on retrouve exactement l'équation 3.56.

Le problème 3.56 avec couches absorbantes se reformule alors à l'aide de 3.58 de la manière suivante

Trouver $u: [0, Z] \times [0, L] \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{i\omega}{c}u - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega\beta_n^N}{c}\varphi^n \\ \frac{\omega^2}{c}\varphi^n + \frac{i\omega}{i\omega - \sigma(x)c} \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{i\omega}{i\omega - \sigma(x)c} \frac{\partial}{\partial x} \psi^n \right) = 0 \\ \psi^n = \alpha_n^N \varphi^n + u \\ \psi^n(x=0, z) = \psi^n(x=L, z) = 0 \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Il s'agit de résoudre un problème sur un domaine étendu composé du domaine physique initial et des 2 couches absorbantes d'épaisseur δ sur lequel on impose des conditions de Dirichlet en $x = 0$ et $x = L$. Nous verrons en fait que l'on peut prendre δ relativement petit ($5\Delta x$ exactement) ce qui fait que le surcoût informatique dû à l'introduction des couches sera vraiment marginal.

Dans le cas d'une couche d'épaisseur δ , une analyse par ondes planes, qui revient à chercher des solutions de 3.60 sous la forme d'ondes planes, permet de déterminer le coefficient de réflexion à l'interface

$$|R| = e^{-2\frac{k_x}{\omega} \int_0^\delta \sigma(s) ds}. \quad (3.61)$$

A première vue, la valeur du coefficient de réflexion donnée par 3.61 permet de penser que la réflexion peut être rendue aussi petite que voulue en choisissant le coefficient σ suffisamment grand. Mais, l'introduction d'un schéma numérique pour résoudre les équations va créer de fait une réflexion à l'interface proportionnelle à $\sigma\Delta x$ et il va s'agir de trouver un compromis entre un σ suffisamment grand pour que l'onde soit bien atténuée et ne génère pas de réflexion sur la condition de Dirichlet en $x = 0$ et en $x = L$ et un σ pas trop élevé pour ne pas créer de réflexion numérique.

Collino [10] a donné une réponse à ce problème en considérant des couches d'épaisseur $\delta = 5\Delta x$, c'est à dire que l'on considère 5 noeuds dans chaque couche. La fonction σ est considérée constante par maille dans chaque couche ce qui fait qu'elle va être déterminée par 5 coefficients ($\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_5$). Il a calculé alors les coefficients σ_i optimaux qui permettent de minimiser le coefficient de réflexion par rapport aux angles d'incidence contenus dans l'onde incidente.

La conclusion de ses travaux est qu'il n'y a pas besoin de considérer des coefficients très précis et qu'une simple fonction $\sigma(x) = x^2$ à l'intérieur des couches permet d'obtenir des résultats très satisfaisants, seules 2 conditions sont à respecter

- la fonction σ doit être une fonction croissante dans la couche pour atténuer l'onde au fur et à mesure qu'elle progresse
- à l'interface entre le domaine physique ($\sigma = 0$) et la couche, il est nécessaire d'avoir une variation relativement faible de σ pour ne pas générer de réflexions dues à la dispersion numérique.

C'est essentiellement l'ordre de grandeur des coefficients qui est important et la précision joue un rôle secondaire tout au moins dans le cadre de l'application qui nous intéresse.

La figure 3.6 illustre numériquement l'efficacité des couches PML et on constate qu'elles permettent d'éliminer totalement l'onde réfléchiée. Elles ont été obtenues en utilisant le schéma numérique qui fait l'objet de la section suivante.

Revenons maintenant aux problèmes 3.39 et 3.43 donnant le champ incident u_0 et le champ diffracté δu . Ils se reformulent sur l'intervalle $[0, Z] \times [0, L]$ en introduisant les couches PML définies dans ce paragraphe avec

$$d(x, z) = \frac{i\omega}{i\omega - \sigma(x)c_0(x, z)} \quad (3.62)$$

- Trouver $u_0 : [0, Z] \times [0, L] \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = c_0^{\frac{1}{2}} v \\ v = v_0 - g\delta(z - z_0) \\ \frac{\partial v_0}{\partial z}(x, z, \omega) = \frac{i\omega}{c_0} v_0 - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega\beta_n^N}{c_0} \varphi^n + \frac{\partial}{\partial z}(g\delta(z - z_0)); \\ \frac{\omega^2}{c_0} \varphi^n + d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} c_0 d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_n^N \varphi^n + v_0) = 0 \\ v_0 = 0 \quad z < z_0 \end{array} \right. \quad (3.63)$$

où g est solution du problème de Helmholtz en dimension 1 suivant x

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^2}{c_0} g(x) + d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} c_0 d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} g(x) = -c_0 \frac{F^S}{2}(x, \omega) \quad \text{en } z = z_0 \\ g(x = 0) = g(x = L) = 0 \end{array} \right. \quad (3.64)$$

- Trouver $\delta u : [0, Z] \times [0, L] \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u = c_0^{\frac{1}{2}} \delta w \\ \delta w = \delta v - g \\ -\frac{\partial \delta v}{\partial z}(x, z, \omega) = \frac{i\omega}{c_0} \delta v - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega\beta_n^N}{c_0} \varphi^n + \frac{\partial}{\partial z} g \\ \frac{\omega^2}{c_0} \varphi^n + d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} c_0 d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_n^N \varphi^n + \delta v) = 0 \\ \delta v = 0 \quad z > Z \end{array} \right. \quad (3.65)$$

où g est solution du problème de Helmholtz

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^2}{c_0} g(x, z) + d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} c_0 d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} g(x, z) = -c_0 \frac{F^R}{2}(x, z, \omega) \\ g(x = 0, z) = g(x = L, z) = 0 \end{array} \right. \quad (3.66)$$

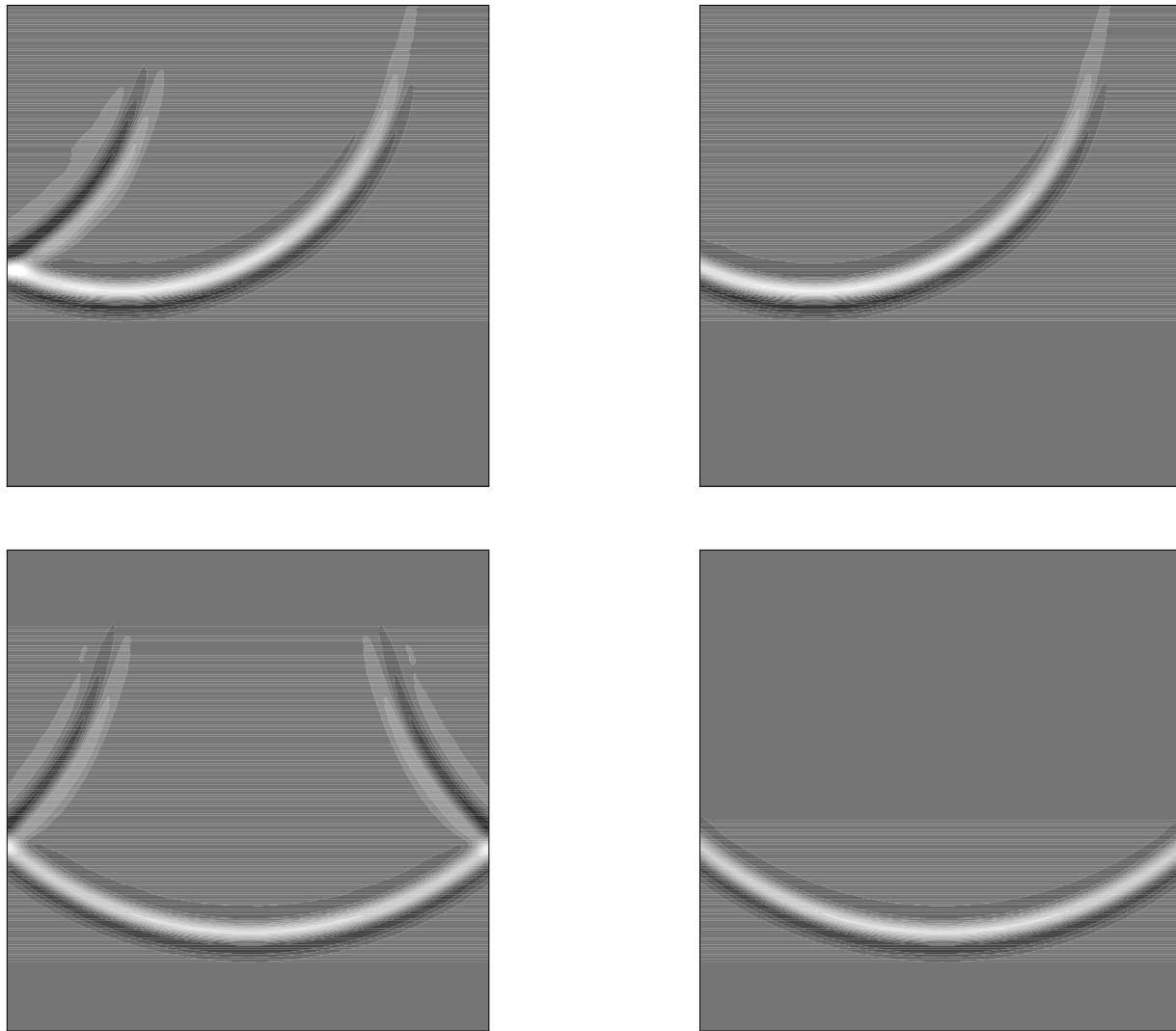


FIG. 3.6 – *propagation par l'équation paraxiale 60 degrés d'un point source pour un milieu de vitesse homogène 2000 m/s. Haut gauche : Conditions de dirichlet sur le bord gauche. Haut droite : Introduction de PML sur le bord gauche. Bas gauche : Conditions de dirichlet sur les 2 bords latéraux. Bas droite : Introduction des PML sur les 2 bords latéraux.*

3.5 La source

La source sismique F^S considérée ici sera ponctuelle en espace et représentée par une dérivée de gaussienne en temps

$$F^S(x, t) = \frac{d}{dt} f(t) \delta(x - x_S) \quad (3.67)$$

où x_S est l'abscisse de la source.

La fonction temporelle $f(t)$ est une gaussienne de la forme

$$f(t) = e^{-\pi F_0^2 (t-t_0)^2} = e^{-\frac{\omega_0^2}{4} (t-t_0)^2} \quad (3.68)$$

où F_0 est la fréquence de la source et t_0 la date d'explosion de la source

$$t_0 = \frac{1}{F_0} \quad (3.69)$$

Le fait de prendre une dérivée de gaussienne permet d'avoir un signal à moyenne nulle et on considère que la source est inactive à partir de $T = 2t_0$.

Tous les calculs étant effectués dans le domaine fréquentiel, il s'agit de calculer la transformée de Fourier de la source.

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} e^{i\omega t_0} e^{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (3.70)$$

On peut alors calculer la transformée de Fourier de la source F^S grâce à la formule

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt} f \right\} (\omega) = -i\omega \mathcal{F} \{ f(\omega) \} \quad (3.71)$$

ce qui donne le résultat

$$F^S(x, \omega) = -i\sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_0} e^{i\omega t_0} e^{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \delta(x - x_S) \quad (3.72)$$

La figure 3.7 montre les fonctions $f(t)$, $\frac{d}{dt} f(t)$ et la transformée de Fourier de la dérivée première en temps correspondant à une fréquence $F_0 = 30$ Hz.

Dans le cas d'une dérivée de gaussienne, la fréquence F_0 correspond à la fréquence centrale du signal ($\omega_0 = 188.5$ pour la figure 3.7); un calcul immédiat donne

$$\left| \frac{F^S(\frac{8}{3}\omega_0)}{F^S(\omega_0)} \right| = 5.3 \cdot 10^{-3}$$

ce qui permet de se restreindre au spectre de fréquence compris dans l'intervalle

$$\left[0, \frac{8}{3}\omega_0\right]$$

correspondant à l'intervalle $[0, 502]$ pour la figure 3.7.

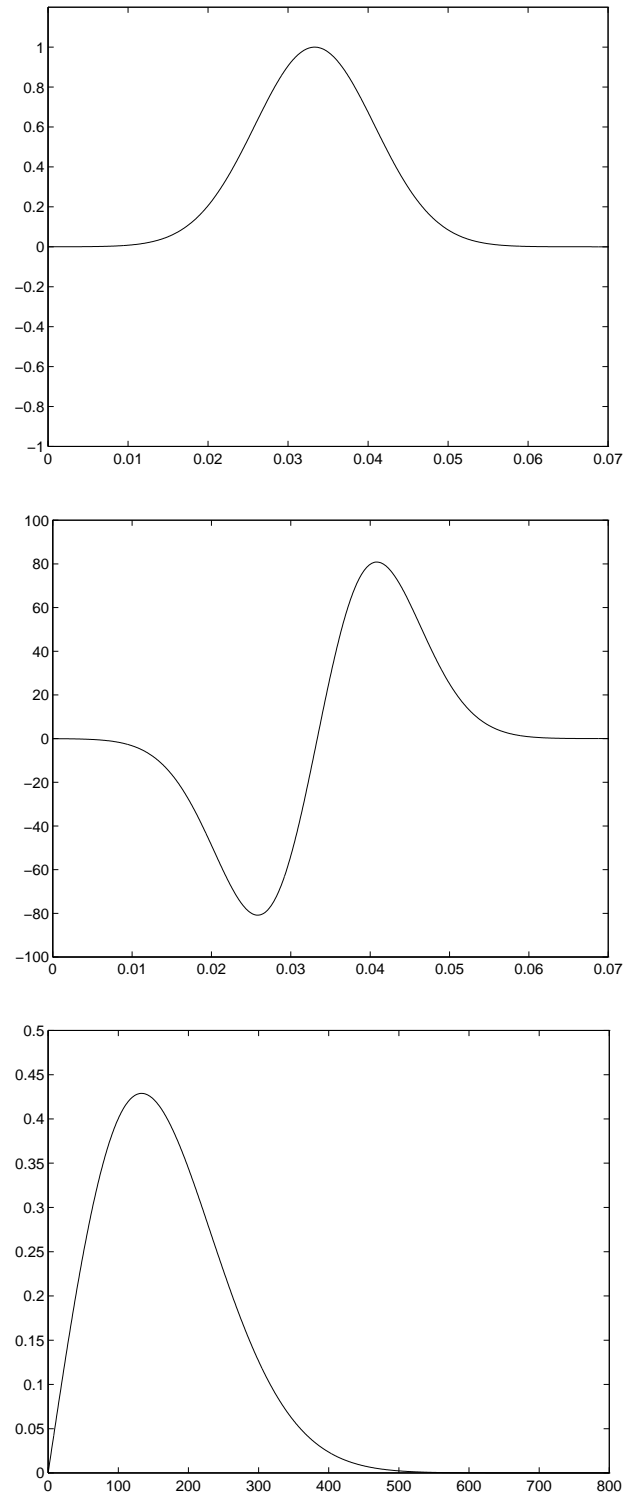


FIG. 3.7 – Représentation de la source pour $F_0 = 30$ Hz Haut : gaussienne $f(t)$, axe horizontal : temps (s). Milieu : dérivée de gaussienne $\frac{d}{dt}f(t)$, axe horizontal : temps (s). Bas : Transformée de fourier de la dérivée de gaussienne, axe horizontal : pulsation ω .

4 Discrétisation: Schéma numérique de résolution

Dans cette section, nous présentons un schéma numérique de résolution des équations paraxiales qui vont permettre de déterminer le champ incident u_0 solution du problème 3.39 et le champ diffracté solution du problème 3.43. Afin d'alléger les écritures, nous présenterons un schéma général de discrétisation des équations paraxiales d'ordre N dans un milieu de vitesse hétérogène et sans second membre. Puis, nous montrerons comment on peut prendre en compte le traitement du second membre qui intervient dans les équations 3.39 et 3.43. Enfin, nous présenterons le schéma numérique de résolution du problème de Helmholtz dont la variable g est solution et qui ne pose aucune difficulté particulière.

Le schéma numérique est basé sur les travaux de Collino [9], Dubrulle [11] et se décompose en 3 étapes

- l'utilisation d'une transformée de Fourier en temps qui permet d'éliminer les dérivées temporelles et facilite la mise en oeuvre du schéma.
- L'écriture d'une formulation variationnelle en x qui permet la semi-discrétisation par éléments finis P_1 en x .
- On obtient alors un problème d'évolution en z qui fait intervenir la somme de $N + 1$ opérateurs que l'on va traiter par splitting et l'intégration se fera par un θ -schéma.

On considère une équation paraxiale d'ordre N en milieu hétérogène $c = c(x, z)$ sur le domaine $[0, L] \times [0, Z]$ avec couches absorbantes de types PML sur les bords latéraux. Le problème s'écrit

Trouver $u: [0, L] \times [0, Z] \longrightarrow R$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial z}(x, z) = \frac{i\omega}{c(x, z)}u(x, z) - \sum_{n=1}^N \frac{i\omega\beta_n^N}{c(x, z)}\varphi^n(x, z) \\ \frac{\omega^2}{c(x, z)d(x, z)}\varphi^n(x, z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(c(x, z)d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} \psi^n(x, z) \right) = 0 \\ \psi^n = \alpha_n^N \varphi^n + u \\ \psi^n(x = 0, z) = \psi^n(x = L, z) = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où

$$d(x, z) = \frac{i\omega}{i\omega - \sigma(x)c(x, z)} \quad (4.2)$$

Pour que la formulation du problème soit complète, on se donne en plus une condition initiale en $z = 0$ de type

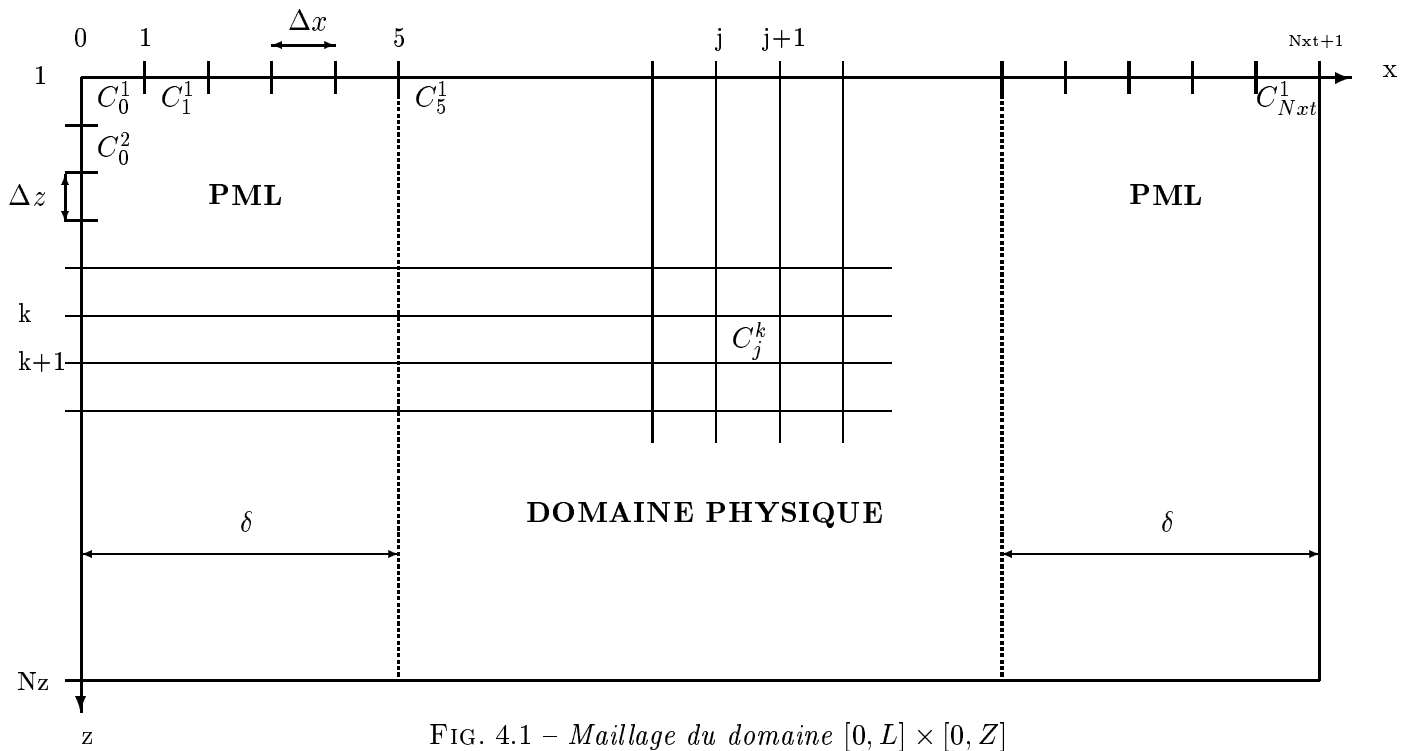
$$u(x, z = 0) = u_0,$$

le traitement du terme source des équations paraxiales donnant le champ u_0 et δu sera explicité plus tard.

On introduit un maillage régulier du domaine $[0, L] \times [0, Z]$ qui comporte

$$(Nxt + 2)(Nz + 1) \text{ points}$$

où $(Nxt + 1)\Delta x = L$ et $Nz\Delta z = Z$

FIG. 4.1 – Maillage du domaine $[0, L] \times [0, Z]$

Sur un intervalle du type $[k\Delta z, (k+1)\Delta z]$, le milieu de vitesse $c(x, z)$ s'écrit sous la forme

$$c(x, z) = \sum_{j=0}^{Nxt} c_j^k \mathbf{1}_{\{x \in \Delta_j^k\}} \quad (4.3)$$

où $\Delta_j^k = [j\Delta x, (j+1)\Delta x] \times [k\Delta z, (k+1)\Delta z]$.

Une couche PML, de largeur $\delta = 5\Delta x$, est définie par la donnée de 5 coefficients $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_5$ avec

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_5$$

où σ_i est la valeur du coefficient d'atténuation sur l'intervalle $](i-1)\Delta x, i\Delta x[$ $i = 1, \dots, 5$.

4.1 Discrétisation en x

On écrit une formulation variationnelle du problème 4.1. Pour cela, on introduit l'espace

$$V = H_0^1([0, L]),$$

on se donne des fonctions tests w et ϕ^n $n = 1, \dots, N \in V$ et on intègre sur l'intervalle $[0, L]$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \int_0^L u \bar{w} dx - i\omega \int_0^L \frac{u \bar{w}}{c} dx + \sum_{n=1}^N i\omega \beta_n^N \int_0^L \frac{\varphi^n \bar{w}}{c} dx = 0 & \forall w \in V \\ \omega^2 \int_0^L \frac{\varphi^n \bar{\phi}^n}{cd} dx - \int_0^L cd \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_n^N \varphi^n + u) \frac{\partial \bar{\phi}^n}{\partial x} dx = 0 & \forall \phi^n \in V \end{cases} \quad (4.4)$$

En définissant les notations

$$(u, v) = \int_0^L u(x) \bar{v}(x) dx$$

$$m_1(z; u, v) = \int_0^L \frac{u(x) \bar{v}(x)}{c(x, z)} dx$$

$$m_2(z; u, v) = \int_0^L \frac{u(x) \bar{v}(x)}{c(x, z) d(x, z)} dx$$

$$a(z; u, v) = \int_0^L c(x, z) d(x, z) \frac{\partial u}{\partial x}(x) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(x) dx$$

La formulation variationnelle se réécrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} (u, w) - i\omega m_1(z; u, w) + i\omega \sum_{n=1}^N \beta_n^N m_1(z; \varphi^n, w) = 0 & \forall w \in V \\ \omega^2 m_2(z; \varphi^n, \phi^n) - a(z; \alpha_n^N \varphi^n + u, \phi^n) = 0 & \forall \phi^n \in V \end{cases} \quad (4.5)$$

L'espace V est approché par éléments finis P_1 , on introduit l'espace

$$V_{h_x} = \{v \in C^0([0, L]), \forall i \ v /_{[i\Delta x, (i+1)\Delta x]} \in P_1\}$$

et on cherche les inconnues u, φ^n et les fonctions tests w, ϕ^n dans l'espace V_{h_x}

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} (u_{h_x}(z), w_{h_x}) - i\omega m_1(z; u_{h_x}(z), w_{h_x}) + i\omega \sum_{n=1}^N \beta_n^N m_1(z; \varphi_{h_x}^n(z), w_{h_x}) = 0 & \forall w_{h_x} \in V \\ \omega^2 m_2(z; \varphi_{h_x}^n(z), \phi_{h_x}^n) - a(z; \alpha_n^N \varphi_{h_x}^n(z) + u_{h_x}(z), \phi_{h_x}^n) = 0 & \forall \phi_{h_x}^n \in V \end{cases} \quad (4.6)$$

En introduisant les opérateurs,

$$\begin{cases} (M_{h_x}^1(z) u_{h_x}, v_{h_x}) = m_1(z; u_{h_x}, v_{h_x}) \\ (M_{h_x}^2(z) u_{h_x}, v_{h_x}) = m_2(z; u_{h_x}, v_{h_x}) \\ (A_{h_x}(z) u_{h_x}, v_{h_x}) = a(z; u_{h_x}, v_{h_x}) \end{cases} \quad (4.7)$$

le problème 4.1 semi-discrétisé en x se réécrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} u_{h_x}(z) - i\omega M_{h_x}^1(z) u_{h_x}(z) + i\omega \sum_{n=1}^N \beta_n^N M_{h_x}^1 \varphi_{h_x}^n(z) = 0 \\ \omega^2 M_{h_x}^2 \varphi_{h_x}^n(z) - A_{h_x}(z) (\alpha_n^N \varphi_{h_x}^n(z) + u_{h_x}(z)) = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Le système 4.8 s'interprète comme un système d'équations différentielles ordinaires en z que l'on va intégrer par splitting.

4.2 Splitting en z

Il s'agit maintenant de calculer la solution du système 4.8 à chaque étape

$$z_k = k\Delta z \quad k = 1, \dots, N_z.$$

Le problème 4.8 peut se réécrire sous la forme de N_z problèmes d'évolutions

Trouver $v_{h_x}: [(k-1)\Delta z, k\Delta z[\rightarrow V_{h_x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} v_{h_x}(z) = S_0 v_{h_x}(z) + \sum_{n=1}^N S_n v_{h_x}(z) \\ v_{h_x}(z_{k-1}) = v_{h_x}^{k-1} \end{cases} \quad (4.9)$$

où les opérateurs S_0 et S_n sont définis par

$$\begin{cases} S_0(z) : V_{h_x} \longrightarrow V_{h_x} \\ v_{h_x} \longrightarrow i\omega M_{h_x}^1(z) v_{h_x} \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} S_n(z) : V_{h_x} \longrightarrow V_{h_x} \\ v_{h_x} \longrightarrow -i\omega \beta_n^N M_{h_x}^1(z) \varphi_{h_x}^n(z) \\ \omega^2 M_{h_x}^2 \varphi_{h_x}^n(z) - \alpha_n^N A_{h_x}(z) \varphi_{h_x}^n(z) = A_{h_x}(z) v_{h_x}(z) \end{cases} \quad (4.11)$$

L'équation paraxiale 4.1 modélise la propagation dans la direction $z > 0$ lorsque t augmente (champ incident de type u_0), le terme source est donc donné à la surface en $z = 0$.

Dans le cas d'une équation paraxiale modélisant la propagation dans la direction $z < 0$ lorsque t augmente (champ diffracté de type δu), le terme source est cette fois donné en $z = Z$ et on évalue alors la solution à chaque étape $k\Delta z$ $k = N_z, \dots, 1$.

La prise en compte des termes sources pour le champ incident u_0 et le champ diffracté δu sera décrite ultérieurement.

Le splitting va s'effectuer sur la somme des opérateurs S_n de l'équation 4.10. Il consiste à remplacer la résolution d'un problème faisant intervenir la somme de $(N+1)$ opérateurs par la résolution de $(N+1)$ problèmes faisant intervenir 1 opérateur sur chaque intervalle $[(k-1)\Delta z, k\Delta z]$.

$$(P_0) \begin{cases} \frac{d}{dz} w_0(z) = S_0 w_0(z) \\ w_0(z = z_{k-1}) = v_{h_x}^{k-1} \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour $n = 1, \dots, N$

$$(P_n) \begin{cases} \frac{d}{dz} w_n(z) = S_n w_n(z) \\ w_n(z = z_{k-1}) = w_{n-1}(z = z_k) \end{cases} \quad (4.13)$$

En posant

$$v_{h_x}(z = z_k) = w_N(z = z_k)$$

on peut montrer

- la solution est exacte si $[S_i, S_j] = S_i S_j - S_j S_i = 0$.
- la solution w_N donne un résultat avec une précision d'ordre 2 en Δz^2 si $[S_i, S_j] \neq 0$.

L'utilisation d'une méthode de splitting permet ici d'intégrer des systèmes relativement simples et il s'agit maintenant de résoudre les problèmes (P_0) et (P_n) $n = 1, \dots, N$.

4.3 Discrétisation en z

4.3.1 Résolution du problème (P_0)

Le problème (P_0) sur l'intervalle $[(k-1)\Delta z, k\Delta z]$ s'écrit

$$(P_0) \begin{cases} \frac{d}{dz} w_0(z) = S_0 w_0(z) = i\omega M_{h_x}^1(z) w_0(z) \\ w_0(z = z_{k-1}) = v_{h_x}^{k-1} \end{cases} \quad (4.14)$$

Cette équation différentielle s'intègre exactement et la solution s'écrit

$$w_0(z_k) = e^{i\omega \int_{z_{k-1}}^{z_k} M_{h_x}^1(z) dz} v_{h_x}^{k-1} \quad (4.15)$$

L'opérateur $M_{h_x}^1$ n'étant pas diagonal, on va condenser la matrice représentant $M_{h_x}^1$ qui permet d'obtenir une matrice $M_{h_x}^{1*}$ diagonale et on va approcher l'intégrale par

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} M_{h_x}^1(z) dz \approx \int_{z_{k-1}}^{z_k} M_{h_x}^{1*}(z) dz \approx \Delta z M_{h_x}^{1*}(z_{k-1} + \frac{\Delta z}{2}) \quad (4.16)$$

et la solution du problème (P_0) devient

$$w_0(z_k) = e^{i\omega \Delta z M_{h_x}^{1*}} v_{h_x}^{k-1} \quad (4.17)$$

4.3.2 Résolution du problèmes (P_n)

Les problèmes (P_n) pour $n = 1, \dots, N$ sur l'intervalle $[(k-1)\Delta z, k\Delta z]$ s'écrivent

$$(P_n) \begin{cases} \frac{d}{dz} w_n(z) = S_n w_n(z) = -i\omega \beta_n^N M_{h_x}^1(z) \varphi_{h_x}^n(z) \\ \omega^2 M_{h_x}^2(z) \varphi_{h_x}^n(z) - \alpha_n^N A_{h_x}(z) \varphi_{h_x}^n(z) = A_{h_x}(z) w_n(z) \end{cases} \quad (4.18)$$

On suppose que Δz est suffisamment petit et on écrit le système 4.18 au point

$$z_{k-\frac{1}{2}} = z_{k-1} + \frac{\Delta z}{2} = z_k - \frac{\Delta z}{2}$$

On peut alors écrire l'approximation

$$\frac{d}{dz} w_n(z_{k-\frac{1}{2}}) = \frac{w_n(z_k) - w_n(z_{k-1})}{\Delta z} \quad (4.19)$$

et on introduit le paramètre de pondération $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$w_n(z_{k-\frac{1}{2}}) = w_n^\theta = \theta w_n(z_k) + (1 - \theta) w_n(z_{k-1}) \quad (4.20)$$

Ainsi, le système 4.18 devient

$$\begin{cases} \frac{w_n(z_k) - w_n(z_{k-1})}{\Delta z} = -i\omega\beta_n^N M_{h_x}^1(z_{k-\frac{1}{2}}) \varphi_{h_x}^n(z_{k-\frac{1}{2}}) \\ \omega^2 M_{h_x}^2(z_{k-\frac{1}{2}}) \varphi_{h_x}^n(z_{k-\frac{1}{2}}) - \alpha_n^N A_{h_x}(z_{k-\frac{1}{2}}) \varphi_{h_x}^n(z) = A_{h_x}(z_{k-\frac{1}{2}}) w_n^\theta \end{cases} \quad (4.21)$$

Nous verrons par la suite que pour éliminer la fonction auxiliaire $\varphi_{h_x}^n$, on est amené à faire intervenir l'inverse de la matrice $M_{h_x}^1$ et, pour que le calcul de l'inverse ne soit pas trop coûteux, on va condenser la matrice $M_{h_x}^1$ et rajouter un paramètre supplémentaire γ pour contrôler la dispersion défini par

$$M_{h_x}^{2\gamma}(z_{k-\frac{1}{2}}) = 6\gamma M_{h_x}^{2*}(z_{k-\frac{1}{2}}) + (1 - 6\gamma) M_{h_x}^2(z_{k-\frac{1}{2}}) \quad (4.22)$$

$M_{h_x}^{2\gamma}$ est donc la matrice obtenue (cf [9]) en considérant une combinaison linéaire de la matrice exacte et la matrice condensée. On remplace alors la matrice $M_{h_x}^1$ par sa version condensée $M_{h_x}^{1*}$ et la matrice $M_{h_x}^2$ par $M_{h_x}^{2\gamma}$

$$\begin{cases} \frac{w_n(z_k) - w_n(z_{k-1})}{\Delta z} = -i\omega\beta_n^N M_{h_x}^{1*}(z_{k-\frac{1}{2}}) \varphi_{h_x}^n(z_{k-\frac{1}{2}}) \\ \omega^2 M_{h_x}^{2\gamma}(z_{k-\frac{1}{2}}) \varphi_{h_x}^n(z_{k-\frac{1}{2}}) - \alpha_n^N A_{h_x}(z_{k-\frac{1}{2}}) \varphi_{h_x}^n(z) = A_{h_x}(z_{k-\frac{1}{2}}) w_n^\theta \end{cases} \quad (4.23)$$

Nous allons maintenant exprimer 4.23 uniquement à l'aide de l'inconnue w_n et éliminer ainsi la fonction auxiliaire $\varphi_{h_x}^n$. Pour cela, on applique l'opérateur

$$(\omega^2 M_{h_x}^{2\gamma} - \alpha_n^N A_{h_x}) \circ (M_{h_x}^{1*})^{-1}(z_{k-\frac{1}{2}})$$

à la première équation du système 4.23 ce qui donne

$$(\omega^2 M_{h_x}^{2\gamma} - \alpha_n^N A_{h_x}) \circ (M_{h_x}^{1*})^{-1}(w_n(z_k) - w_n(z_{k-1})) = -i\omega\Delta z\beta_n^N A_{h_x}(z_{k-\frac{1}{2}}) w_n^\theta \quad (4.24)$$

En remplaçant w_n^θ par son expression 4.20, le système s'écrit maintenant de manière explicite et on obtient

$$\begin{cases} \left((\omega^2 M_{h_x}^{2\gamma} - \alpha_n^N A_{h_x}) \circ (M_{h_x}^{1*})^{-1} + i\omega \Delta z \beta_n^N \theta A_{h_x} \right) w_n(z_k) = \\ \left((\omega^2 M_{h_x}^{2\gamma} - \alpha_n^N A_{h_x}) \circ (M_{h_x}^{1*})^{-1} - i\omega \Delta z \beta_n^N (1 - \theta) A_{h_x} \right) w_n(z_{k-1}) \end{cases} \quad (4.25)$$

ce qui se met sous la forme

$$T_1 w_n(z_k) = T_2 w_n(z_{k-1}) \quad (4.26)$$

où T_1 et T_2 sont des matrices de taille $N_{xt} \times N_{xt}$.

4.4 Influence des paramètres γ et θ du schéma

On pourra obtenir les démonstrations rigoureuses sur l'existence et la stabilité en se référant à Collino [9]. L'objet de ce paragraphe est uniquement de citer les résultats nécessaires à l'implémentation du schéma numérique.

Le paramètre θ a été introduit pour la discrétisation suivant z .

$$\frac{d}{dz} u(z_{k-\frac{1}{2}}) = \frac{u(z_k) - u(z_{k-1})}{\Delta z} \quad (4.27)$$

avec

$$u(z_{k-\frac{1}{2}}) = \theta u(z_k) + (1 - \theta) u(z_{k-1}) \quad (4.28)$$

L'approximation 4.27 est précise en $O(\Delta z^2)$ tandis que 4.28 est précise en $O([(2\theta - 1)\Delta z, \Delta z^2])$.

Une analyse par ondes planes de type

$$u(z) = u_0 e^{ik_z z}$$

permet de montrer que

$$\begin{cases} \theta < \frac{1}{2} \implies \text{Im } k_z < 0 \\ \theta > \frac{1}{2} \implies \text{Im } k_z \geq 0 \\ \theta = \frac{1}{2} \implies \text{Im } k_z = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

On en déduit alors

- la condition $\theta \geq \frac{1}{2}$ est nécessaire et suffisante pour la stabilité du schéma et correspond à des solutions exponentiellement décroissantes avec la profondeur z .
- la condition $\theta < \frac{1}{2}$ correspond à un schéma instable dont les solutions augmentent exponentiellement avec la profondeur z .
- la condition $\theta = \frac{1}{2}$ permet de montrer la conservation de l'énergie du schéma dans le cas d'un milieu de vitesse homogène avec des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann sur les bords latéraux.

Le paramètre γ a été introduit pour la discrétisation suivant x .

Il permet de contrôler la dispersion numérique du schéma et d'améliorer l'ordre d'approximation de la dérivée seconde en x . Par construction, le paramètre γ doit être choisi dans l'intervalle

$$0 \leq \gamma < \frac{1}{4}.$$

Mais, on peut montrer la stabilité du θ -schéma ainsi que l'unicité de la solution pour

$$0 \leq \gamma < \frac{1}{5}.$$

Le choix $\gamma = \frac{1}{12}$ permet d'obtenir une approximation d'ordre 4 exactement de la dérivée seconde en x .

Le paramètre γ optimal semble être

$$\gamma = \frac{1}{10}$$

car c'est celui qui permet d'introduire le moins de dispersion numérique dans le schéma tout en fournissant une approximation proche de l'ordre 4 pour la dérivée seconde.

4.5 Assemblage du système linéaire

Ce paragraphe va permettre d'explicitier le calcul des matrices du système linéaire 4.26 dans une base de V_{h_x} . La base considérée ici sera la base des fonctions chapeaux définie par

$$w_j(x) = \begin{cases} \frac{(x - j\Delta x)}{\Delta x} + 1 & (j-1)\Delta x \leq x \leq j\Delta x \\ -\frac{(x - j\Delta x)}{\Delta x} + 1 & j\Delta x \leq x \leq (j+1)\Delta x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.30)$$

On peut remplacer les fonctions tests w_{h_x} et $\phi_{h_x}^n$ du système 4.6 par les fonctions de base w_j $j = 1, \dots, N_{xt} \in V_{h_x}$

$$\begin{cases} \text{Pour } j = 1, \dots, N_{xt} \\ \frac{d}{dz}(u_{h_x}(z), w_j) - i\omega m_1(z; u_{h_x}(z), w_j) + i\omega \sum_{n=1}^N \beta_n^N m_1(z; \varphi_{h_x}^n(z), w_j) = 0 \\ \omega^2 m_2(z; \varphi_{h_x}^n(z), w_j) - a(z; \alpha_n^N \varphi_{h_x}^n(z) + u_{h_x}(z), w_j) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Les inconnues u_{h_x} et $\varphi_{h_x}^n$ se décomposent sur la base des fonctions chapeaux

$$u_{h_x}(z) = \sum_{i=1}^{N_{xt}} u_i(z) w_i(x)$$

$$\varphi_{h_x}^n(z) = \sum_{i=1}^{N_{xt}} \varphi_i^n(z) w_i(x)$$

et on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \text{Pour } j = 1, \dots, N_{xt} \\ \frac{d}{dz} \sum_{i=1}^{N_{xt}} u_i(z) (w_i, w_j) - i\omega \sum_{i=1}^{N_{xt}} u_i(z) m_1(z; w_i, w_j) + i\omega \sum_{n=1}^N \beta_n^N \sum_{i=1}^{N_{xt}} \varphi_i^n(z) m_1(z; w_i, w_j) = 0 \\ \omega^2 \sum_{i=1}^{N_{xt}} \varphi_i^n(z) m_2(z; w_i, w_j) - \sum_{i=1}^{N_{xt}} (\alpha_n^N \varphi_i^n(z) + u_i(z)) a(z; w_i, w_j) = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Il y a donc 4 types d'expression à calculer

- $(w_i, w_j) = \int_0^L w_i(x) w_j(x) dx \quad i, j = 1, \dots, N_{xt}$
- $m_1(z; w_i, w_j) = \int_0^L \frac{w_i(x) w_j(x)}{c(x, z)} dx \quad i, j = 1, \dots, N_{xt}$
- $m_2(z; w_i, w_j) = \int_0^L \frac{w_i(x) w_j(x)}{c(x, z) d(x, z)} dx \quad i, j = 1, \dots, N_{xt}$
- $a(z; w_i, w_j) = \int_0^L c(x, z) d(x, z) \frac{\partial w_i(x)}{\partial x} \frac{\partial w_j(x)}{\partial x} dx \quad i, j = 1, \dots, N_{xt}$

La condensation de masse des matrices est effectuée par un schéma numérique à 2 pts

$$\int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} f(x)dx = \frac{\Delta x}{2} (f((j-1)\Delta x) + f(j\Delta x)) \quad (4.33)$$

Les matrices qui interviennent dans le calcul de ces expressions sont de taille $N_{xt} \times N_{xt}$ et les calculs sont effectués sur l'intervalle $[(k-1)\Delta z, k\Delta z]$.

Calcul de $(w_i, w_j) = \int_0^L w_i(x)w_j(x)dx$

En utilisant le schéma numérique 4.33, on obtient $(w_i, w_j) = U_{ij}^* \Delta x$ avec

$$U_{ij}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Une intégration exacte donne $(w_i, w_j) = U_{ij} \Delta x$ avec

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Calcul de $m_1(z; w_i, w_j) = \int_0^L \frac{w_i(x)w_j(x)}{c(x, z)} dx$

Dans le schéma numérique, seule la matrice condensée intervient. En utilisant le schéma 4.33, on obtient $m_1(z; w_i, w_j) = M_{ij}^{1*} \Delta x$ avec

$$M_{ij}^{1*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1}) & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0 & \frac{1}{2}(\frac{1}{c_{N_{xt}-1}} + \frac{1}{c_{N_{xt}}}) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Calcul de $m_2(z; w_i, w_j) = \int_0^L \frac{w_i(x)w_j(x)}{c(x, z)d(x, z)} dx$

Dans le schéma numérique, la matrice qui intervient est une combinaison linéaire de la matrice condensée et la matrice exacte.

Le schéma 4.33 permet d'écrire la matrice condensée $m_2(z; w_i, w_j) = M_{ij}^{2*} \Delta x$ avec

$$M_{ij}^{2*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{c_0 d_0} + \frac{1}{c_1 d_1}) & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\frac{1}{c_1 d_1} + \frac{1}{c_2 d_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0 & \frac{1}{2}(\frac{1}{c_{N_{xt}-1} d_{N_{xt}-1}} + \frac{1}{c_{N_{xt}} d_{N_{xt}}}) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Une intégration exacte permet d'écrire $m_2(z; w_i, w_j) = M_{ij}^2 \Delta x$ avec

$$M_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\frac{1}{c_0 d_0} + \frac{1}{c_1 d_1}) & \frac{1}{6} \frac{1}{c_1 d_1} & & 0 \\ \frac{1}{6} \frac{1}{c_1 d_1} & \frac{1}{3}(\frac{1}{c_1 d_1} + \frac{1}{c_2 d_2}) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{1}{6} \frac{1}{c_{N_{xt}-1} d_{N_{xt}-1}} \\ 0 & & \frac{1}{6} \frac{1}{c_{N_{xt}-1} d_{N_{xt}-1}} & \frac{1}{3}(\frac{1}{c_{N_{xt}-1} d_{N_{xt}-1}} + \frac{1}{c_{N_{xt}} d_{N_{xt}}}) \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

La matrice $M^{2\gamma} = 6\gamma M^{2*} + (1 - 6\gamma)M^2$ est une matrice tridiagonale qui s'écrit

$$\begin{cases} M_{i,i}^{2\gamma} = (\frac{1}{2} - \gamma)(\frac{1}{c_{i-1} d_{i-1}} + \frac{1}{c_i d_i}) & i = 1, \dots, N_{xt} \\ M_{i,i-1}^{2\gamma} = \frac{\gamma}{c_{i-1} d_{i-1}} & i = 2, \dots, N_{xt} \\ M_{i-1,i}^{2\gamma} = \frac{\gamma}{c_{i-1} d_{i-1}} & i = 2, \dots, N_{xt} \end{cases} \quad (4.39)$$

Calcul de $a(z; w_i, w_j) = \int_0^L c(x, z) d(x, z) \frac{\partial w_i(x)}{\partial x} \frac{\partial w_j(x)}{\partial x} dx$

Une intégration exacte donne $a(z; w_i, w_j) = \frac{A_{ij}}{\Delta x}$ avec

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} c_0 d_0 + c_1 d_1 & -c_1 d_1 & & & 0 \\ & -c_1 d_1 & c_1 d_1 + c_2 d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -c_{N_{xt}-1} d_{N_{xt}-1} \\ 0 & & & -c_{N_{xt}-1} d_{N_{xt}-1} & c_{N_{xt}-1} d_{N_{xt}-1} + c_{N_{xt}} d_{N_{xt}} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Nous pouvons maintenant calculer de manière explicite les matrices T_1 et T_2 qui interviennent dans le système 4.26.

Les opérateurs $M_{h_x}^1, M_{h_x}^2$ et A_{h_x} sont définis par la relation 4.7 et agissent sur l'inconnue $u_{h_x}(z)$.

Les opérateurs M^1, M^2 et A agissent eux sur la décomposition de $u_{h_x}(z)$ sur la base $\{w_j(x)\}$. Ils sont donc reliés via la matrice des produits scalaires $(w_i, w_j) = U_{ij} \Delta x$

$$\begin{cases} M_{h_x}^1 = U^{-1} M^1 \\ M_{h_x}^2 = U^{-1} M^2 \\ A_{h_x} = \frac{1}{\Delta x^2} U^{-1} A \end{cases} \quad (4.41)$$

Le système 4.26 que l'on rappelle ici

$$\begin{cases} \left((\omega^2 M_{h_x}^{2\gamma} - \alpha_n^N A_{h_x}) \circ (M_{h_x}^{1*})^{-1} + i\omega \Delta z \beta_n^N \theta A_{h_x} \right) w_n(z_k) = \\ \left((\omega^2 M_{h_x}^{2\gamma} - \alpha_n^N A_{h_x}) \circ (M_{h_x}^{1*})^{-1} - i\omega \Delta z \beta_n^N (1 - \theta) A_{h_x} \right) w_n(z_{k-1}) \end{cases} \quad (4.42)$$

peut alors se réécrire en utilisant 4.41 ce qui donne

$$\begin{cases} \left(\omega^2 M^{2\gamma} \circ (M^{1*})^{-1} \circ U - \frac{\alpha_n^N}{\Delta x^2} A \circ (M^{1*})^{-1} \circ U + i\omega \frac{\Delta z}{\Delta x^2} \beta_n^N \theta A \right) w_n(z_k) = \\ \left(\omega^2 M^{2\gamma} \circ (M^{1*})^{-1} \circ U - \frac{\alpha_n^N}{\Delta x^2} A \circ (M^{1*})^{-1} \circ U - i\omega \frac{\Delta z}{\Delta x^2} \beta_n^N (1 - \theta) A \right) w_n(z_{k-1}) \end{cases} \quad (4.43)$$

En posant

$$\begin{cases} TT_1 = M^{2\gamma} \circ (M^{1*})^{-1} \circ U \\ TT_2 = A \circ (M^{1*})^{-1} \circ U \\ TT_3 = A \end{cases} \quad (4.44)$$

le système se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\omega^2 TT_1 - \frac{\alpha_n^N}{\Delta x^2} TT_2 + i\omega \frac{\Delta z}{\Delta x^2} \beta_n^N \theta TT_3 \right) w_n(z_k) = \\ \left(\omega^2 TT_1 - \frac{\alpha_n^N}{\Delta x^2} TT_2 - i\omega \frac{\Delta z}{\Delta x^2} \beta_n^N (1 - \theta) TT_3 \right) w_n(z_{k-1}) \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Pour terminer la discrétisation, il ne reste plus qu'à expliciter les matrices TT_1 , TT_2 et TT_3 .

$$\left\{ \begin{array}{ll} TT_{3\ i,i} = c_{i-1}d_{i-1} + c_id_i & i = 1, \dots, N_{xt} \\ TT_{3\ i,i-1} = -c_{i-1}d_{i-1} & i = 2, \dots, N_{xt} \\ TT_{3\ i-1,i} = -c_{i-1}d_{i-1} & i = 2, \dots, N_{xt} \end{array} \right. \quad (4.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} TT_{2\ i,i} = 2 \frac{(c_{i-1}d_{i-1} + c_id_i)c_{i-1}c_i}{c_{i-1} + c_i} & i = 1, \dots, N_{xt} \\ TT_{2\ i,i-1} = -2 \frac{c_{i-1}^2 d_{i-1} c_{i-2}}{c_{i-1} + c_{i-2}} & i = 2, \dots, N_{xt} \\ TT_{2\ i-1,i} = -2 \frac{c_{i-1}^2 d_{i-1} c_i}{c_{i-1} + c_i} & i = 2, \dots, N_{xt} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} TT_{1\ i,i} = -\frac{(2\gamma - 1)(c_{i-1}d_{i-1} + c_id_i)}{d_{i-1}d_i(c_{i-1} + c_i)} & i = 1, \dots, N_{xt} \\ TT_{1\ i,i-1} = -2 \frac{\gamma c_{i-2}}{d_{i-1}(c_{i-2} + c_{i-1})} & i = 2, \dots, N_{xt} \\ TT_{1\ i-1,i} = -2 \frac{\gamma c_i}{d_{i-1}(c_{i-1} + c_i)} & i = 2, \dots, N_{xt} \end{array} \right. \quad (4.48)$$

4.6 Prise en compte du terme source

Ayant défini la discrétisation des équations paraxiales sans 2^{nd} membre, ce paragraphe va permettre de montrer comment on peut prendre en compte le terme source dans le schéma de discrétisation. Pour le champ incident u_0 comme pour le champ diffracté δu , le terme source intervient au 2^{nd} membre des équations paraxiales 3.63 et 3.65.

En ce qui concerne la discrétisation de ces équations, la démarche est exactement la même que celle qui a été présentée. Après semi-discrétisation en x , les équations s'écrivent sous la forme d'une équation différentielle en z .

Dans le cas de l'équation 3.63 modélisant le champ u_0 , il s'agit de résoudre un problème d'évolution en profondeur sur chaque intervalle $[(k-1)\Delta z, k\Delta z[$ $k = 1, \dots, N_z$ où le terme source intervient uniquement sur $[0, \Delta z[$

Trouver $u_{h_x} : [0, \Delta z[\longrightarrow V_{h_x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} u_{h_x}(z) = S_0 u_{h_x}(z) + \sum_{n=1}^N S_n u_{h_x}(z) + \frac{d}{dz} g_{h_x}(z) \\ u_{h_x}(z=0) = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

où g_{h_x} est solution du problème de Helmholtz 3.64 puis pour $k = 2, \dots, N_z$

Trouver $u_{h_x} : [(k-1)\Delta z, k\Delta z[\longrightarrow V_{h_x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} u_{h_x}(z) = S_0 u_{h_x}(z) + \sum_{n=1}^N S_n u_{h_x}(z) \\ u_{h_x}(z = z_{k-1}) = u_{h_x}^{k-1} \end{cases} \quad (4.50)$$

Dans le cas de l'équation 3.65 modélisant le champ δu , il s'agit de résoudre un problème d'évolution en profondeur avec 2^{nd} membre sur chaque intervalle $[k\Delta z, (k+1)\Delta z[$ $k = N_z, \dots, 1$

Trouver $\delta u_{h_x} : [k\Delta z, (k+1)\Delta z[\longrightarrow V_{h_x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \delta u_{h_x}(z) = S_0 \delta u_{h_x}(z) + \sum_{n=1}^N S_n \delta u_{h_x}(z) + \frac{d}{dz} g_{h_x}(z) \\ \delta u_{h_x}(z = z_k) = \delta u_{h_x}^{k-1} \end{cases} \quad (4.51)$$

où g_{h_x} est solution du problème de Helmholtz 3.66.

L'initialisation se fait pour $z = Z$

$$\delta u_{h_x}(z = Z) = 0$$

Le problème qui se pose ici est que l'introduction du 2^{nd} membre dans l'équation 4.49 comme dans l'équation 4.51 ne permet plus de traiter la somme des opérateurs S_n par splitting. Pour s'affranchir du 2^{nd} membre et justifier le splitting décrit dans le schéma numérique, on va considérer des fonctions g_{h_x} constantes par maille suivant z , c'est à dire sous la forme

$$g_{h_x}(z) = \sum_{k=1}^{N_z-1} g_{h_x}^k \mathbf{1}_{[(k-1)\Delta z, k\Delta z]}(z) \quad (4.52)$$

Ainsi, le 2^{nd} membre $\frac{d}{dz}g_{h_x}$ s'exprime à l'aide de fonctions de Dirac (ce résultat se retrouve facilement en dérivant au sens des distributions)

$$\frac{d}{dz}g_{h_x}(z) = \sum_{k=1}^{N_z-1} g_{h_x}^k (\delta(z - (k-1)\Delta z) - \delta(z - k\Delta z)) \quad (4.53)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{d}{dz}g_{h_x}(z) = \sum_{k=0}^{N_z} [g_{h_x}]_{k\Delta z} \delta(z - k\Delta z) \quad (4.54)$$

où $[g_{h_x}]_{k\Delta z}$ est le saut de g_{h_x} sur l'interface $k\Delta z$ défini par

$$\begin{cases} [g_{h_x}]_{k\Delta z} = g_{h_x}^{k+1} - g_{h_x}^k & k = 1, \dots, N_z - 1 \\ [g_{h_x}]_{0\Delta z} = g_{h_x}^1 & k = 0 \\ [g_{h_x}]_{N_z\Delta z} = -g_{h_x}^{N_z} & k = N_z \end{cases} \quad (4.55)$$

Ainsi, le problème 4.49 se réécrit

Trouver $u_{h_x}: [0, \Delta z[\longrightarrow V_{h_x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}u_{h_x}(z) = S_0 u_{h_x}(z) + \sum_{n=1}^N S_n u_{h_x}(z) + [g_{h_x}]_{0\Delta z} \delta(z - 0) \\ u_{h_x}(z = 0) = 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

et le problème 4.51 se réécrit

Trouver $\delta u_{h_x}: [k\Delta z, (k+1)\Delta z[\longrightarrow V_{h_x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}\delta u_{h_x}(z) = S_0 \delta u_{h_x}(z) + \sum_{n=1}^N S_n \delta u_{h_x}(z) + [g_{h_x}]_{k\Delta z} \delta(z - k\Delta z) \\ \delta u_{h_x}(z = z_k) = \delta u_{h_x}^{k-1} \end{cases} \quad (4.57)$$

Les équations 4.56 et 4.57 sont des équations différentielles du 1^{er} ordre en z ou les opérateurs S_0 et S_n sont linéaires.

Le problème 4.56 a la même solution que le problème

Trouver $u_{h_x} : [0, \Delta z[\longrightarrow V_{h_x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} u_{h_x}(z) = S_0 u_{h_x}(z) + \sum_{n=1}^N S_n u_{h_x}(z) \\ u_{h_x}(z = 0) = [g_{h_x}]_{0\Delta z} \end{cases} \quad (4.58)$$

et le problème 4.57 a la même solution que le problème

Trouver $\delta u_{h_x} : [k\Delta z, (k+1)\Delta z[\longrightarrow V_{h_x}$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \delta u_{h_x}(z) = S_0 \delta u_{h_x}(z) + \sum_{n=1}^N S_n \delta u_{h_x}(z) \\ \delta u_{h_x}(z = z_k) = \delta u_{h_x}^{k-1} + [g_{h_x}]_{k\Delta z} \end{cases} \quad (4.59)$$

Ainsi, le fait de considérer des fonctions g_{h_x} constantes par maille permet de s'affranchir du 2^{nd} membre en le passant en condition initiale et on peut alors utiliser le splitting en passant le terme source en condition initiale du problème (P_0) .

- Le splitting du problème 4.58 sur l'intervalle $[0, \Delta z[$ s'écrit

$$(P_0) \begin{cases} \frac{d}{dz} w_0(z) = S_0 w_0(z) \\ w_0(z = 0) = [g_{h_x}]_{0\Delta z} \end{cases} \quad (4.60)$$

Pour $n = 1, \dots, N$

$$(P_n) \begin{cases} \frac{d}{dz} w_n(z) = S_n w_n(z) \\ w_n(z = z_{k-1}) = w_{n-1}(z = z_k) \end{cases} \quad (4.61)$$

avec $u_{h_x}(z = z_k) = w_N(z = z_k)$.

- Le splitting du problème 4.59 sur l'intervalle $[k\Delta z, (k+1)\Delta z[$ s'écrit

$$(P_0) \begin{cases} \frac{d}{dz} w_0(z) = S_0 w_0(z) \\ w_0(z = z_k) = \delta u_{h_x}^{k-1} + [g_{h_x}]_{k\Delta z} \end{cases} \quad (4.62)$$

Pour $n = 1, \dots, N$

$$(P_n) \begin{cases} \frac{d}{dz} w_n(z) = S_n w_n(z) \\ w_n(z = z_k) = w_{n-1}(z = z_{k-1}) \end{cases} \quad (4.63)$$

avec $\delta u_{h_x}(z = z_k) = w_N(z = z_k)$.

La résolution des problèmes (P_0) et (P_n) est donnée en section 4.3.1 et 4.3.2.

4.7 Résolution du problème de Helmholtz

Il s'agit maintenant d'expliciter la résolution des problèmes 3.64 et 3.66 où l'on a vu, d'après le paragraphe précédent, que g sera déterminée constante sur chaque intervalle $[(k-1)\Delta z, k\Delta z[$.

On se place alors sur l'intervalle $[z_{k-1}, z_k]$ et les problèmes 3.64 et 3.66 s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\omega^2}{c_0 d(x, z)} g(x, z) + \frac{\partial}{\partial x} c_0 d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} g(x, z) = F(x, z) & \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}} \\ g(x=0) = g(x=L) = 0 \end{cases} \quad (4.64)$$

avec

$$\begin{cases} F(x, z) = -c_0 \frac{F^S}{2}(x, \omega) & \text{en } z = z_{\frac{1}{2}} \\ F(x, z) = -c_0 \frac{F^R}{2}(x, z, \omega) & \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.65)$$

En ce qui concerne l'équation 3.64, il s'agit de résoudre le problème 4.64 sur l'intervalle $[0, \Delta z[$.

Dans le cas de l'équation 3.66, il s'agit de résoudre $N_z - 1$ problèmes 4.64 sur chaque intervalle $[z_{k-1}, z_k]$.

Le problème 4.64 va être approché par éléments finis P_1 ; Pour cela, on introduit l'espace

$$V = H_0^1([0, L])$$

et on écrit une formulation variationnelle de 4.64

$$\begin{cases} \omega^2 \int_0^L \frac{1}{c_0(x, z) d(x, z)} g(x, z, \omega) \bar{\varphi}(x) dx - \int_0^L c_0(x, z) d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} g(x, z, \omega) \frac{\partial}{\partial x} \bar{\varphi}(x) dx = \\ \int_0^L \frac{F(x, z)}{d(x, z)} \bar{\varphi}(x) dx \quad \forall \varphi \in V \quad \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.66)$$

On introduit les formes bilinéaires

$$m(z; u, v) = \int_0^L \frac{1}{c_0(x, z) d(x, z)} u(x) \bar{v}(x) dx$$

$$a(z; u, v) = \int_0^L c_0(x, z) d(x, z) \frac{\partial}{\partial x} u(x) \frac{\partial}{\partial x} \bar{v}(x) dx$$

$$L_F(z; v) = \int_0^L \frac{F(x, z)}{d(x, z)} \bar{v}(x) dx$$

et la formulation variationnelle se réécrit

$$m(z_{k-\frac{1}{2}}; g, \varphi) - a(z_{k-\frac{1}{2}}; g, \varphi) = L_F(z_{k-\frac{1}{2}}; \varphi) \quad \forall \varphi \in V \quad (4.67)$$

On approche l'espace V par

$$V_{h_x} = \{v \in C^0([0, L]), \forall i \ v / [i\Delta x, (i+1)\Delta x] \in P_1\}$$

et on cherche g et φ dans l'espace V_{h_x}

$$m(z_{k-\frac{1}{2}}; g_{h_x}, \varphi_{h_x}) - a(z_{k-\frac{1}{2}}; g_{h_x}, \varphi_{h_x}) = L_F(z_{k-\frac{1}{2}}; \varphi_{h_x}) \quad \forall \varphi_{h_x} \in V_{h_x} \quad (4.68)$$

Les fonctions de base chapeaux w_j $j = 1, \dots, N_{xt}$ définis auparavant formant une base de V_{h_x} , l'inconnue g_{h_x} se décomposent sur cette base

$$g_{h_x}(x, z) = \sum_{i=1}^{N_{xt}} g_{h_x}^i(z) w_i(x) \quad \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}}$$

et on obtient le système suivant

$$\begin{cases} j = 1, \dots, N_{xt} \\ \sum_{i=1}^{N_{xt}} g_{h_x}^i m(z_{k-\frac{1}{2}}; w_i, w_j) - \sum_{i=1}^{N_{xt}} g_{h_x}^i a(z_{k-\frac{1}{2}}; w_i, w_j) = L_F(z_{k-\frac{1}{2}}; w_j) \end{cases} \quad (4.69)$$

Les 2 formes bilinéaires m et a ont déjà été calculées dans le paragraphe sur l'assemblage du système linéaire. Il reste uniquement le calcul du 2nd membre à effectuer.

Cas de l'équation 3.64

la fonction F s'écrit

$$F(x, z) = -c_0 \frac{F^S}{2}(x, \omega) \delta(z - z_0) \quad (4.70)$$

avec $z_0 = 0$ et F^S est une source sismique définie par une dérivée de gaussienne ponctuelle en espace

$$F^S(x, \omega) = f(\omega) \delta(x - x_s) \quad (4.71)$$

où $x_s = i_S \Delta x$ est la position de la source.

Du point de vue numérique, on est amené à remplacer la fonction de Dirac en $z = 0$ par la fonction indicatrice qui vaut 1 sur $[0, \Delta z[$ de manière à déterminer g constant sur l'intervalle $[0, \Delta z[$.

Le 2nd membre s'écrit

$$L_F(z; w_j) = -\frac{f(\omega)}{2} \int_0^L \frac{c_0(x, z)}{d(x, z)} \delta(x - x_s) w_j(x) dx \quad z \in [0, \Delta z[\quad (4.72)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} (L_F)_{i_S} = -\frac{f(\omega)}{2} \frac{c_{0i_S}}{d_{i_S}} \\ (L_F)_j = 0 \quad j \neq i_S \quad j = 1, \dots, N_{xt} \end{cases} \quad (4.73)$$

Cas de l'équation 3.66

la fonction F s'écrit

$$F(x, z) = -c_0 \frac{F^R}{2}(x, z, \omega) \quad \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}} \quad (4.74)$$

avec

$$F^R(x, z) = -2\omega^2 \frac{\delta c(x, z)}{c_0^3(x, z)} u0(x, z, \omega) \quad (4.75)$$

en faisant l'approximation

$$u0(x, z_{k-\frac{1}{2}}, \omega) = \frac{1}{2}(u0(x, z_{k-1}, \omega) + u0(x, z_k, \omega)) = u0^k(x, \omega) \quad \text{sur } [(k-1)\Delta z, k\Delta z[\quad (4.76)$$

Le 2nd membre s'écrit

$$L_F(z; w_j) = \omega^2 \int_0^L \frac{1}{d(x, z)} \frac{\delta c(x, z)}{c_0^2(x, z)} u0^k(x, \omega) w_j(x) dx \quad \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}} \quad (4.77)$$

$$L_F(z; w_j) = \omega^2 \sum_{j=1}^{N_{xt}} \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} \frac{1}{d(x, z)} \frac{\delta c(x, z)}{c_0^2(x, z)} u0^k(x, \omega) w_j(x) dx \quad \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}} \quad (4.78)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} \frac{1}{d(x, z)} \frac{\delta c(x, z)}{c_0^2(x, z)} u0^k(x, \omega) w_j(x) dx = \\ \frac{1}{d_{j-1}} \frac{\delta c_{j-1}}{c_{0j-1}^2} \int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} u0^k(x, \omega) w_j(x) dx \quad \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (4.79)$$

On utilise alors une formule d'intégration de type trapèze

$$\int_{(j-1)\Delta x}^{j\Delta x} f(x) dx = \frac{\Delta x}{2} (f((j-1)\Delta x) + f(j\Delta x)) \quad (4.80)$$

et le 2nd membre devient

$$\left\{ \begin{array}{l} (L_F)_j = \omega^2 \left(\frac{1}{d_{j-1}} \frac{\delta c_{j-1}}{c_{0j-1}^2} + \frac{1}{d_j} \frac{\delta c_j}{c_{0j}^2} \right) \frac{\Delta x}{2} u0^k(j\Delta x, \omega) \quad \text{en } z = z_{k-\frac{1}{2}} \\ j = 1, \dots, N_{xt} \end{array} \right. \quad (4.81)$$

4.8 Aspects numériques

Le schéma numérique présenté résout les équations paraxiales dans le domaine fréquentiel et il s'agit maintenant de faire la correspondance avec le domaine temporel. Les intégrales de Fourier sont évaluées numériquement à l'aide de séries de Fourier et le nombre de fréquences à utiliser pour reconstruire la solution en temps va jouer un grand rôle au niveau du coût informatique de la méthode dans son ensemble.

4.8.1 Calcul des intégrales de Fourier

La solution du schéma numérique fournit une solution $u(\omega, x, z)$ et la solution en temps correspondante se calcule à l'aide d'une intégrale de Fourier

$$u(t, x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\omega, x, z) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.82)$$

Ayant défini un pas en fréquence $\Delta\omega$ avec

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f,$$

la solution u est connue aux points $p\Delta\omega$ et on peut alors approcher l'intégrale par

$$u(t, x, z) \simeq u_h(t, x, z) \quad (4.83)$$

où

$$u_h(t, x, z) = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p \geq 1} \left(u(p\Delta\omega, x, z) e^{-ip\Delta\omega t} + u(-p\Delta\omega, x, z) e^{-i(-p\Delta\omega)t} \right). \quad (4.84)$$

La fonction $u(t, x, z)$ étant réelle, $u(-p\Delta\omega, x, z) = \overline{u(p\Delta\omega, x, z)}$ et la fonction u_h se réécrit

$$u_h(t, x, z) = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p \geq 1} \left(u(p\Delta\omega, x, z) e^{-ip\Delta\omega t} + \overline{u(p\Delta\omega, x, z)} e^{-i\overline{(p\Delta\omega)}t} \right) \quad (4.85)$$

ce qui donne

$$u_h(t, x, z) = \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p \geq 1} \Re \left(u(p\Delta\omega, x, z) e^{-ip\Delta\omega t} \right). \quad (4.86)$$

On va alors pouvoir considérer uniquement les valeurs de p positives. On a vu dans le cas de la source sismique en section 3.5 que l'on pouvait s'intéresser uniquement à l'intervalle de fréquence

$$\omega \in [0, \frac{8}{3}\omega_0]$$

où $\omega_0 = 2\pi F_0$ est la fréquence de la source. Ainsi, ayant choisi un pas en fréquence Δf tel que

$$N_F \Delta f = \frac{8}{3} 2\pi F_0,$$

la série de fourier 4.86 s'écrit

$$u_h(t, x, z) = \frac{2\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p=1}^{N_F} \Re \left(u(p\Delta\omega, x, z) e^{-ip\Delta\omega t} \right) \quad (4.87)$$

Il s'agit maintenant de calculer le pas en fréquence Δf qui va permettre de déterminer le nombre de fréquences à utiliser.

La relation liant u et u_h est basée sur le fait que la fonction u_h vérifie

$$u_h(t, x, z) = u_h(t + \frac{p}{\Delta f}, x, z) \quad (4.88)$$

avec p entier et s'écrit

$$u_h(t, x, z) = u(t, x, z) + \sum_p u(t + \frac{p}{\Delta f}, x, z). \quad (4.89)$$

La relation 4.89 montre l'existence d'une infinité de multiples obtenus en translatant u avec le temps T_p où

$$T_p = \frac{p}{\Delta f}$$

On peut remarquer que plus le pas en fréquence Δf est petit, moins la solution est perturbée par les multiples.

Si on introduit le temps T tel que

$$u(t, x, z) = 0 \quad \forall \quad t > T$$

c'est à dire tel que le champ d'onde u soit sorti du domaine physique $[0, L] \times [0, Z]$, on peut réécrire la relation 4.89 pour $t = T$

$$u_h(T, x, z) = u(T, x, z) + \sum_p u\left(T + \frac{p}{\Delta f}, x, z\right) \quad (4.90)$$

Avec l'hypothèse $u(t, x, z) = 0$ pour $t > T$, la relation devient

$$u_h(t = T, x, z) = u(t = T, x, z) \quad (4.91)$$

et les multiples n'affectent pas la solution u .

Le calcul précis de T est difficile à réaliser car il dépend du milieu de vitesse $c(x, z)$ et de la géométrie du problème L, Z .

Si on suppose que l'axe z est la direction privilégiée, ceci permet d'écrire

$$\frac{1}{\Delta f} > \min_x \int_0^Z \frac{1}{c_0(x, z)} dz. \quad (4.92)$$

5 Résultats numériques

Cette dernière partie a essentiellement deux buts

- valider le schéma numérique présenté.
- montrer expérimentalement comment les équations paraxiales permettent de retrouver non seulement les temps d'arrivées mais également les amplitudes des solutions de l'équation des ondes.

Dans le cadre de ces expériences, le milieu de vitesse $c(x, z)$ est décomposé via l'approximation de Born (cf section 3.1) en

$$c(x, z) = c_0(x, z) + \delta c(x, z),$$

et nous allons considérer successivement les cas suivants :

- La première expérience consiste à comparer les champs incidents, nommés u_0 dans ce qui précède, l'un fourni par les équations paraxiales et l'autre par l'équation des ondes complète, c'est à dire non linéarisée. La comparaison est effectuée à travers des instantannés de propagation pour un milieu de vitesse c_0 homogène ($c_0 = 2000$ m/s) puis pour le milieu c_0 hétérogène représenté par la figure 5.1.
- Le champ diffracté δu fera l'objet de la deuxième expérience et la comparaison sera effectuée avec l'équation des ondes complète et l'équation des ondes linéarisée. La propagation aura lieu dans le milieu c_0 homogène et le milieu c_0 hétérogène (fig. 5.1). Nous considérerons un milieu de perturbation δc composé d'une réflectivité plane (fig. 5.7) et d'une réflectivité courbe (fig. 5.7).
- La troisième expérience va permettre de montrer comment les équations paraxiales permettent de prendre en compte les temps d'arrivées multiples. Pour cela, on considère un milieu c_0 homogène composé d'une lentille (fig. 5.17) qui fait apparaître une décroissance de la vitesse.
- La dernière expérience sera consacrée au modèle de Marmousi (fig. 5.20) qui est un peu considéré comme le Graal dans le domaine de l'inversion sismique. Ceci va permettre d'apprécier l'utilisation des équations paraxiales dans le cas d'un modèle de grande dimension ayant une structure relativement complexe.

Pour toutes les expériences envisagées ici, la propagation de la source sera réalisée avec l'équation paraxiale 60° qui semble être le meilleur compromis en vue d'une application géophysique. Les résultats obtenus au niveau des instantannés de propagation pourront être comparés à ceux obtenus par Graves et Clayton ([13]).

La source (cf section 3.5) est une ondelette de Ricker

$$F^S(x, t) = \frac{d}{dt} e^{-\pi F_0^2 (t-t_0)^2} \delta(x - x_S) \quad (5.1)$$

définie par

$$F_0 = 25 \text{ Hz}, \quad t_0 = \frac{1}{F_0}, \quad x_S = \frac{L}{2} \quad (5.2)$$

La dimension des domaines pour les trois premières expériences est $L = 1$ km, $Z = 1$ km.

- La résolution de l'équation des ondes non linéarisée est obtenue à partir d'un schéma d'ordre 2 explicite en temps et qui admet la condition CFL

$$\frac{v_{max} \Delta t}{h} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Afin de s'affranchir des problèmes de dispersion numérique, le maillage Ω_h comporte 201×201 points de discrétisation ($\Delta x = \Delta z = 5m$) ce qui revient à travailler avec un minimum de 12 points par longueur d'onde.

- La résolution des équations paraxiales est réalisée à l'aide du schéma numérique présenté dans les sections précédentes, les paramètres que l'on a retenus sont

$$\begin{cases} \theta = 0.5 \\ \gamma = 0.1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Nous allons considérer 2 types de maillage correspondant à la discrétisation du domaine $\Omega = [0, L] \times [0, Z]$:

- un maillage Ω_h comportant 201×201 points de discrétisation ($\Delta x = \Delta z = 5m$)
- un maillage Ω_H comportant 101×101 points de discrétisation ($\Delta x = \Delta z = 10m$).

5.1 Calcul numérique de l'erreur

Afin de quantifier l'erreur introduite d'une part par l'approximation de Born et d'autre part par l'approximation paraxiale de l'équation des ondes, ces expériences ont donné lieu à un calcul d'erreur. Ce calcul est effectué sur les intantannés de propagation dans le cas du champ incident et sur les sismogrammes dans le cas du champ diffracté ce qui va permettre de juger précisément de la qualité des résultats obtenus.

Un sismogramme correspond à l'enregistrement, au cours du temps, du champ diffracté à la surface ($z = 0$). Pour ces expériences, on associe un enregistreur (ou géophone) à chaque point de la grille.

5.1.1 Cas du champ incident

Il s'agit de calculer l'erreur relative (en norme L_2) entre la solution u_{parax} fournie par l'équation paraxiale 60° et la solution u_{onde} fournie par l'équation des ondes sur le maillage Ω_h

$$E(u_{onde}^h, u_{parax}^h) = \frac{\|u_{onde}^h - u_{parax}^h\|_{L_2(\Omega_h)}}{\|u_{onde}^h\|_{L_2(\Omega_h)}} \quad (5.4)$$

sur le maillage Ω_H

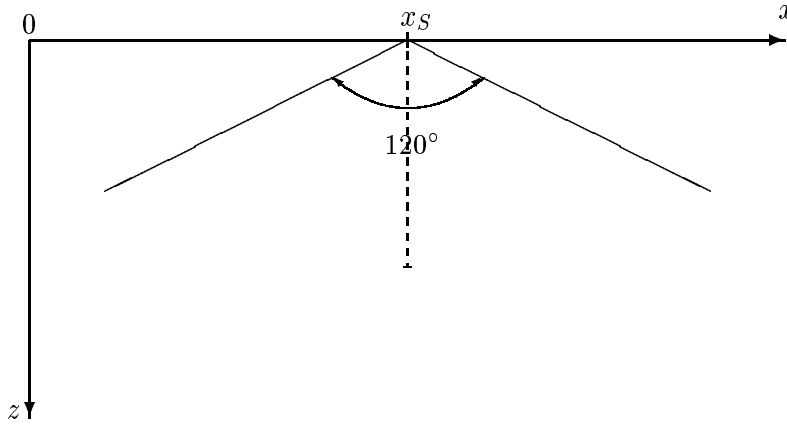
$$E(u_{onde}^h, u_{parax}^H) = \frac{\|u_{onde}^h - u_{parax}^H\|_{L_2(\Omega_H)}}{\|u_{onde}^h\|_{L_2(\Omega_H)}} \quad (5.5)$$

où u_{parax}^h et u_{parax}^H sont les solutions de l'équation paraxiale sur les maillages Ω_h et Ω_H .

On est aussi amené à considérer l'erreur entre les solutions de l'équation paraxiale 60° sur le maillage Ω_h et sur le maillage Ω_H

$$E(u_{parax}^h, u_{parax}^H) = \frac{\|u_{parax}^h - u_{parax}^H\|_{L_2(\Omega_H)}}{\|u_{parax}^h\|_{L_2(\Omega_H)}} \quad (5.6)$$

Dans le cas d'un instantané de propagation, on s'intéresse à l'erreur uniquement dans le cône des directions de propagation où l'équation paraxiale est définie.



En dehors de ce domaine, le front d'onde présente une erreur importante tant au niveau des amplitudes que de sa forme ce qui entraîne un calcul d'erreur pas vraiment représentatif de la qualité de l'approximation dans le cône d'intérêt.

5.1.2 Cas du champ diffracté

Il s'agit de calculer l'erreur engendrée sur les sismogrammes entre la solution u_{parax} de l'équation paraxiale 60° et la solution u_{onde} de l'équation des ondes.

De la même façon, nous allons pouvoir définir l'erreur en norme L_2 sur 2 types de maillage correspondant à la discrétisation du domaine $\Sigma = [0, L] \times [0, T]$:

- un maillage Σ_h comportant $201 \times NT$ points de discrétisation
- un maillage Σ_H comportant $101 \times NT$ points de discrétisation

On considère alors le même calcul d'erreur que celui donné par les relations 5.4, 5.5 et 5.6 en remplaçant Ω_h par Σ_h et Ω_H par Σ_H .

5.2 Résultats pour le champ incident u_0

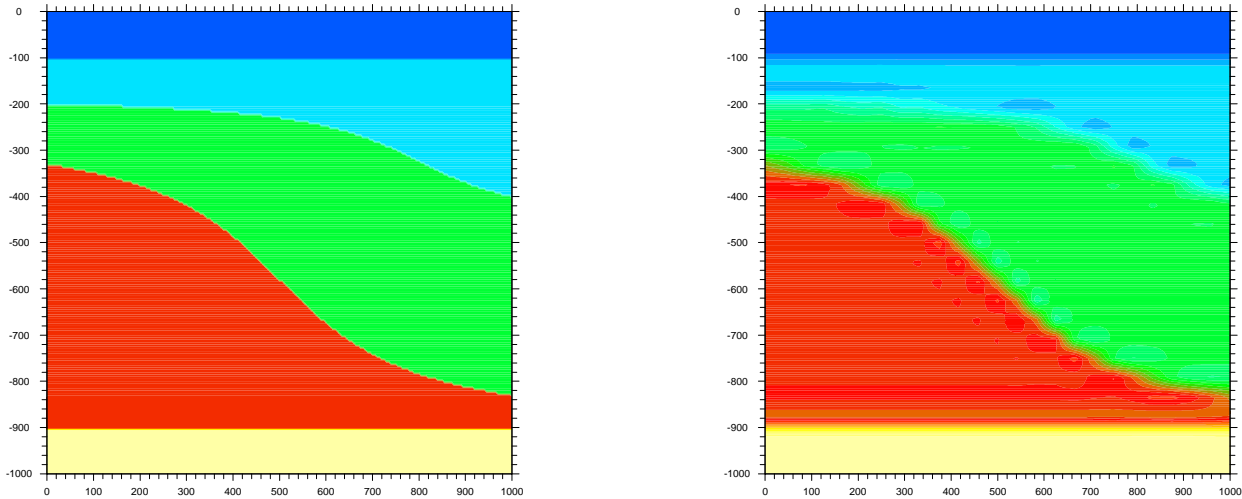


FIG. 5.1 – *Cas du milieu c_0 hétérogène. Axe horizontal: distance(m), axe vertical: altitude(m). Gauche : milieu de Synclay composé de 5 couches d'amplitudes respectives 1500, 1800, 2300, 3000 et 4000 m/s. Droite : milieu c_0 généré à partir d'un lissage du milieu de Synclay.*

Nous avons effectué 2 expériences numériques: Il s'agit de comparer l'équation des ondes complète et l'approximation paraxiale de l'équation des ondes dans le cas du milieu de vitesse homogène $c_0(x, z) = 2000$ m/s et dans le cas du milieu c_0 défini par la figure 5.1; Ce milieu correspond à un lissage du milieu de Synclay (fig. 5.1 gauche) ce qui permet de ne pas générer de réflexion à l'interface des différentes couches.

Les résultats sont donnés par les figures 5.2 et 5.3 dans le cas homogène et par les figures 5.5 et 5.6 dans le cas hétérogène et correspondent à la propagation sur la grille Ω_h comportant 201×201 points de discrétisation.

Les figures de gauche sont obtenues par la résolution de l'équation des ondes complètes et les figures de droite correspondent à l'approximation paraxiale de l'équation des ondes obtenues par l'équation paraxiale 60° .

Les instantanés correspondant à l'équation des ondes et à son approximation paraxiale sont représentés à la même échelle sur les figures qui suivent et sont donc directement comparables.

On peut alors observer

- l'utilisation des coefficients de Padé complexes permet de faire disparaître presque complètement les modes évanescents.
- Dans le cas homogène et dans la zone où l'approximation paraxiale est valide, l'équation paraxiale permet de bien rendre compte des amplitudes et ceci sera confirmé par les calculs d'erreurs qui vont suivre.
- En dehors de la zone de validité, que ce soit dans le cas homogène ou hétérogène, les équations paraxiales propagent avec une amplitude plus forte que l'équation des ondes et le front d'onde est, en plus, déformé dans cette zone. On touche ici au principal inconvénient des équations paraxiales. Cet inconvénient, dans le cadre d'une application géophysique, reste secondaire étant donné que les sismogrammes sont constitués essentiellement d'ondes qui se propagent dans une direction proche de la verticale.

Pour faire face à ce problème, une solution peut consister à appliquer au champ source un filtre $F(k_x, \omega)$ ($k_x = \omega \sin \theta$) qui va éliminer les directions de propagation qui sont hors du cône de propagation où l'équation paraxiale est définie

$$F(k_x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{k_x}{\omega} < \sin \theta_m \\ \left(1 - \frac{1}{(1 - \sin \theta_m)^2} \left(\frac{k_x}{\omega} - \sin \theta_m\right)^2\right)^3 & \text{si } \sin \theta_m < \frac{k_x}{\omega} < 1 \\ 0 & \text{si } \frac{k_x}{\omega} > 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

où θ_m est l'angle d'ouverture du cône pour lequel l'équation paraxiale est définie.

Calcul de l'erreur dans le milieu homogène

Nous avons alors effectué un calcul d'erreur sur les maillages Ω_h et Ω_H dans le cas du milieu c_0 homogène. Les calculs ont été effectués pour les instantanés de propagation correspondant aux figures 5.2 et 5.3. Conformément aux notations définies par les relations 5.4, 5.5 et 5.6, il s'agit de calculer l'erreur entre :

- la solution de l'équation des ondes sur Ω_h et la solution de l'équation paraxiale 60° sur Ω_h
- la solution de l'équation paraxiale sur Ω_h et la solution de l'équation paraxiale 60° sur Ω_H
- la solution de l'équation des ondes sur Ω_h et la solution de l'équation paraxiale 60° sur Ω_H

Les résultats sont donnés en pourcentage par le tableau suivant :

	$t = 0.1s$	$t = 0.2s$	$t = 0.3s$	$t = 0.4s$	$t = 0.5s$
$E(u_{onde}^h, u_{parax}^h) (\%)$	7.7	7.4	9	7.4	7.6
$E(u_{parax}^h, u_{parax}^H) (\%)$	12.8	13.1	13.1	13.3	13.1
$E(u_{onde}^h, u_{parax}^H) (\%)$	20.2	21.4	22.9	21.3	20.7

A travers ces résultats, on constate que dans le cas homogène, l'erreur $E(u_{onde}^h, u_{parax}^h)$ entre la solution de l'équation des ondes et la solution de l'équation paraxiale sur le maillage Ω_h est inférieure à 10%. La figure 5.4 permet de visualiser cette erreur en montrant la différence entre les 2 solutions sur le maillage Ω_h .

Le schéma numérique de discrétisation des équations paraxiales permet de travailler avec moins de points par longueur d'onde que celui utilisé pour la résolution de l'équation des ondes. L'erreur $E(u_{parax}^h, u_{parax}^H)$ se situe aux alentours de 13% ce qui engendre une erreur $E(u_{onde}^h, u_{parax}^H)$ comprise entre 20% et 25%.

Ce résultat reste tout à fait raisonnable compte tenu du fait que l'on utilise une approximation de l'équation des ondes.

Calcul de l'erreur dans le milieu de Synclay

Il s'agit cette fois de calculer l'erreur L_2 entre la solution de l'équation des ondes et la solution de l'équation paraxiale 60° pour le milieu de vitesse hétérogène défini par la figure 5.1. Le calcul a été effectué sur le maillage Ω_h et pour les instantanés de propagation correspondant aux figures 5.5 et 5.6.

Les résultats sont donnés en pourcentage par le tableau suivant :

	$t = 0.15s$	$t = 0.2s$	$t = 0.3s$	$t = 0.35s$	$t = 0.4s$	$t = 0.45s$
$E(u_{onde}^h, u_{parax}^h) (\%)$	14.2	16.7	23.3	26	28.9	28.8

Bien sûr, on constate que les résultats sont moins bons que dans le cas homogène et que l'erreur a tendance à augmenter au cours du temps.

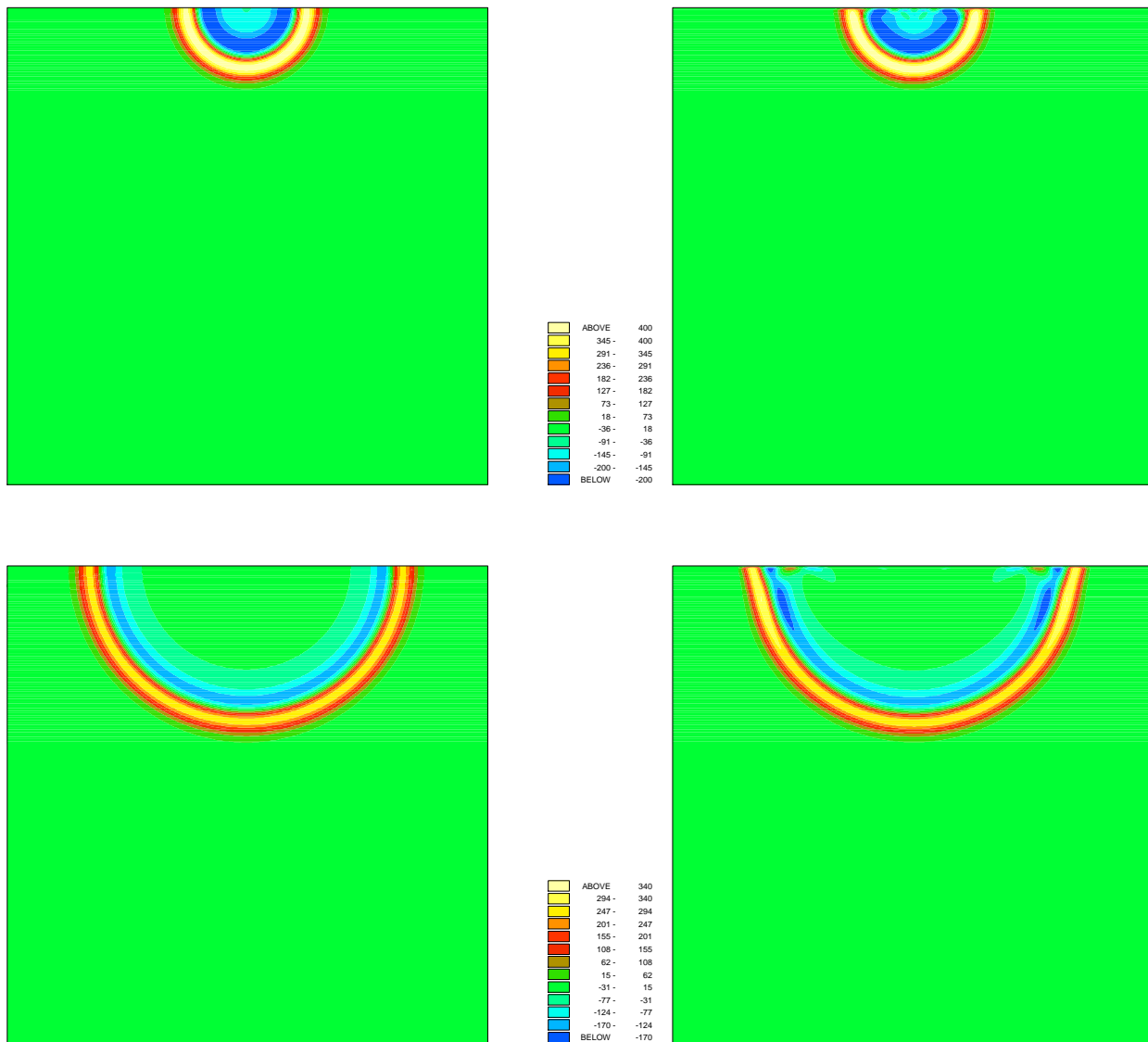


FIG. 5.2 – Instantannés pris au cours de la propagation d'un point source dans un milieu homogène $c_0 = 2000$ m/s. Figures de gauche : propagation avec l'équation des ondes. Figures de droite : propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.1$ s Bas : instant $t = 0.2$ s

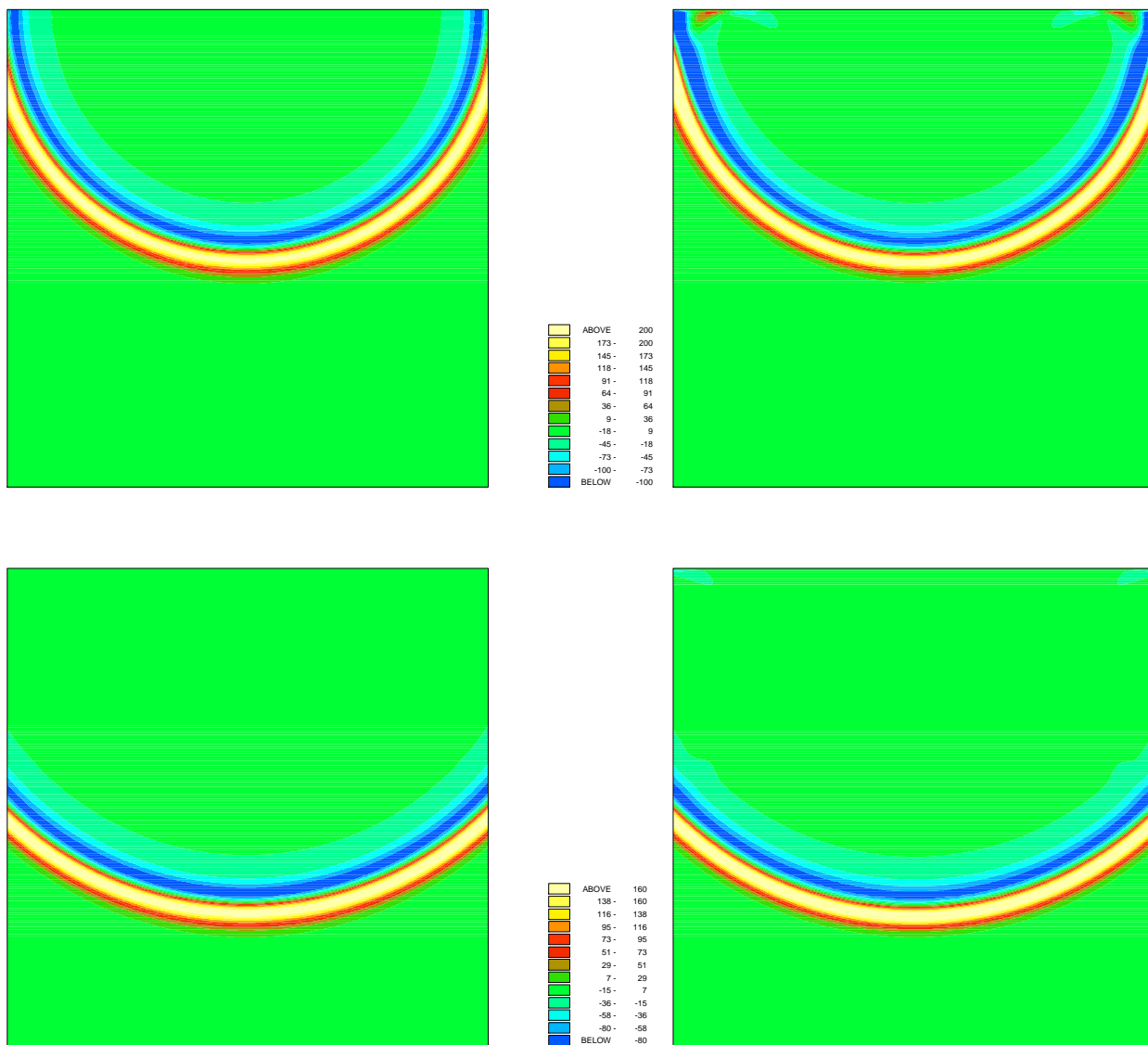


FIG. 5.3 – Instantannés pris au cours de la propagation d'un point source dans un milieu homogène $c_0 = 2000$ m/s. Figures de gauche : propagation avec l'équation des ondes. Figures de droite : propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.3s$ Bas : instant $t = 0.4s$

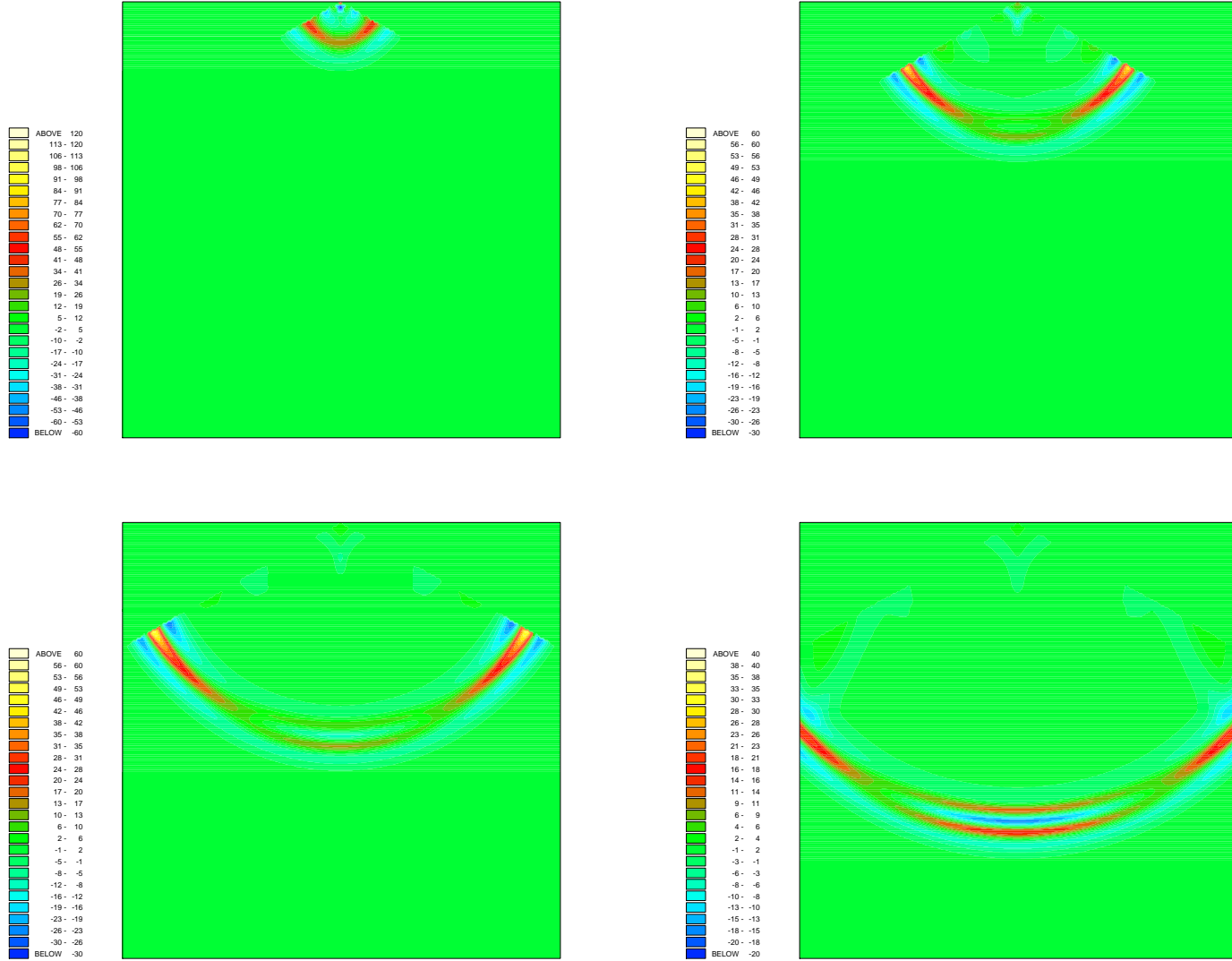


FIG. 5.4 – Différence entre la solution u_{onde} de l'équation des ondes et la solution u_{parax} de l'équation paraxiale 60° . Haut gauche: instant $t=0.1s$ Haut droite: instant $t=0.2s$ Bas gauche: instant $t=0.3s$ Bas droite: instant $t=0.4s$

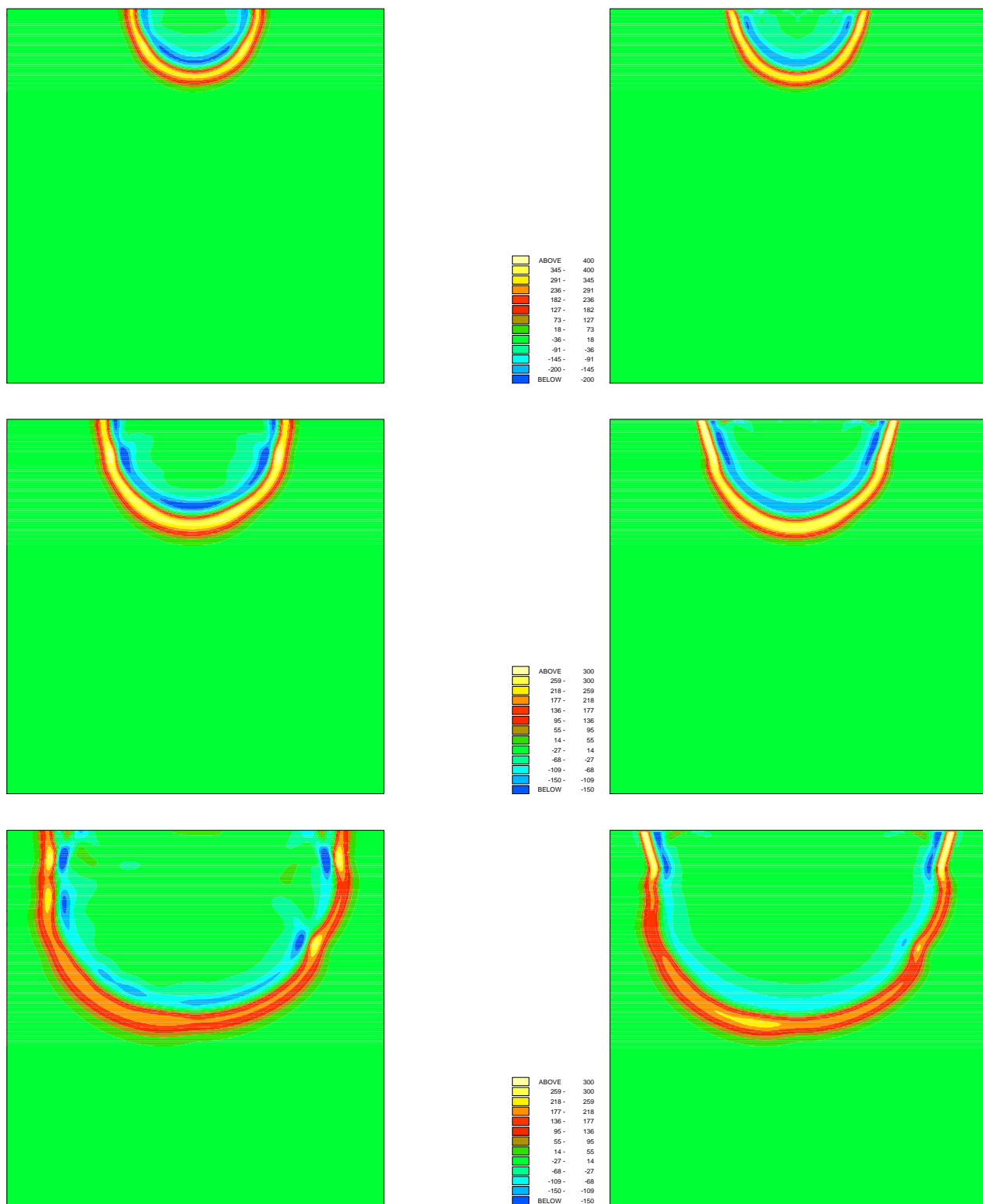


FIG. 5.5 – Instantannés pris au cours de la propagation d'un point source dans le milieu hétérogène 5.1. Figures de gauche : propagation avec l'équation des ondes. Figures de droite : propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.15s$ Milieu : instant $t = 0.2s$ Bas : instant $t = 0.3s$

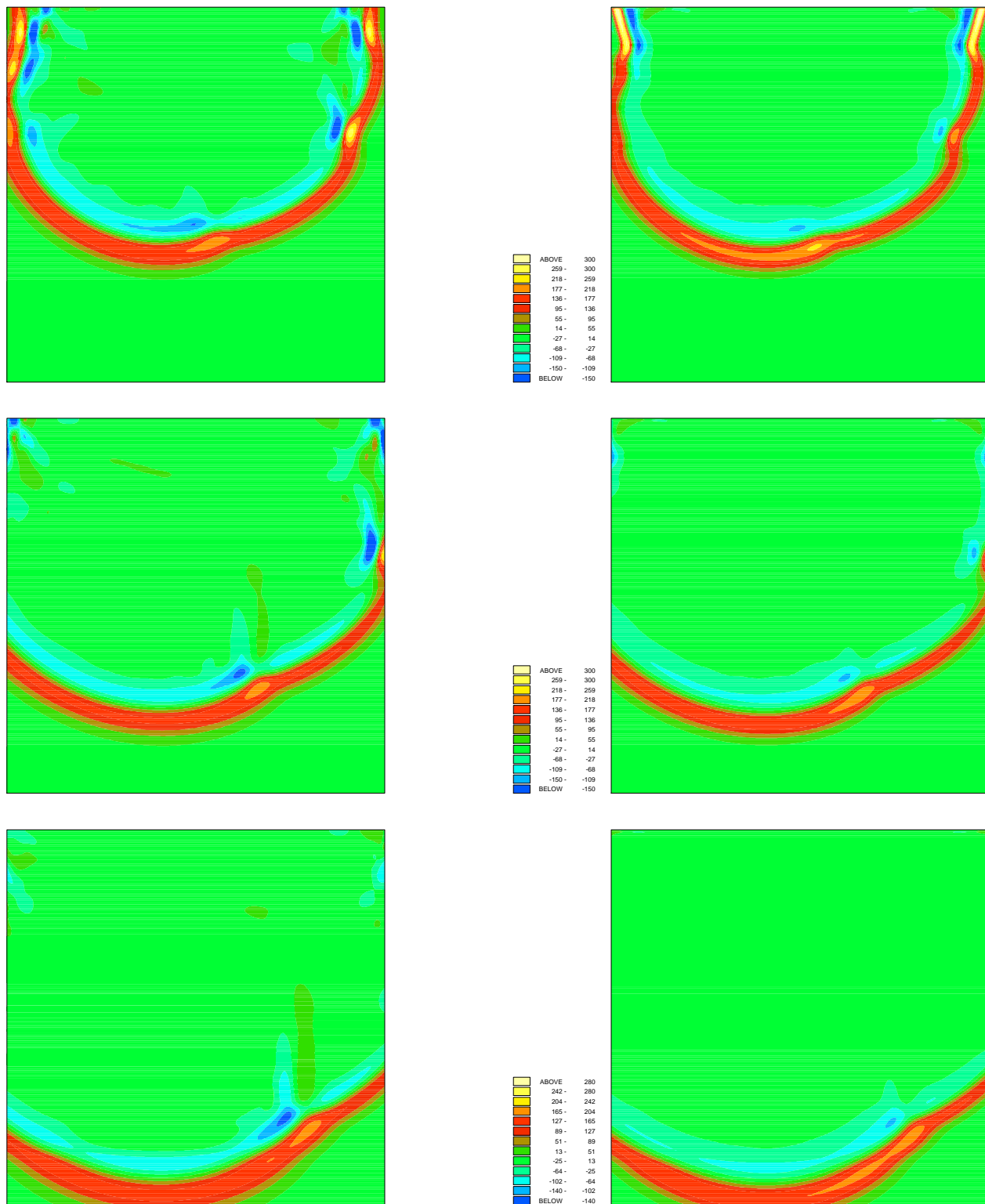


FIG. 5.6 – Instantannés pris au cours de la propagation d'un point source dans le milieu hétérogène 5.1. Figures de gauche : propagation avec l'équation des ondes. Figures de droite : propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.35s$ Milieu : instant $t = 0.4s$ Bas : instant $t = 0.45s$

5.3 Résultats pour le champ diffracté δu

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser au champ diffracté δu obtenu à partir des milieux de perturbation de la figure 5.7. La comparaison sera réalisée d'une part avec l'équation des ondes et d'autre part avec l'équation des ondes linéarisée autour d'un milieu de vitesse c_0 .

La solution numérique linéarisée sera calculée directement à partir de la solution non linéaire. Ceci afin d'éviter de construire un code de calcul supplémentaire. Pour cela, on se donne un réel $\varepsilon > 0$ et on considère les milieux de vitesse

$$\begin{cases} c_0(x, z) + \varepsilon \delta c(x, z) \\ c_0(x, z) - \varepsilon \delta c(x, z) \end{cases} \quad (5.8)$$

A ces 2 milieux de vitesse correspond un champ de pression u non linéarisé

$$\begin{cases} u(c_0(x, z) + \varepsilon \delta c(x, z), t) \\ u(c_0(x, z) - \varepsilon \delta c(x, z), t) \end{cases} \quad (5.9)$$

Si ε est suffisamment petit, on peut alors effectuer une linéarisation de u autour du milieu c_0 qui s'écrit

$$\begin{cases} u(c_0(x, z) + \varepsilon \delta c(x, z), t) = u(c_0(x, z), t) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial c}(c_0(x, z), t) \delta c(x, z) \\ u(c_0(x, z) - \varepsilon \delta c(x, z), t) = u(c_0(x, z), t) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial c}(c_0(x, z), t) \delta c(x, z) \end{cases} \quad (5.10)$$

En effectuant la différence de ces 2 expressions, on obtient l'expression de la solution linéarisée qui s'écrit

$$u_{lin}(x, z, t) \approx \frac{1}{2\varepsilon} (u(c_0(x, z) + \varepsilon \delta c(x, z), t) - u(c_0(x, z) - \varepsilon \delta c(x, z), t)) \quad (5.11)$$

où $u(c_0(x, z) + \varepsilon \delta c(x, z), t)$ et $u(c_0(x, z) - \varepsilon \delta c(x, z), t)$ sont calculées à partir du code d'équation d'onde non linéaire. En pratique, le paramètre ε est lié à la précision machine.

Nous allons effectuer 4 expériences numériques :

- Propagation dans le milieu de vitesse homogène $c_0 = 2000$ m/s avec le milieu de perturbation composé de la réflectivité représentée en haut de la figure 5.7. Cette expérience a donnée lieu à un calcul d'erreur sur les sismogrammes entre les solutions correspondant à l'équation des ondes, l'équation des ondes linéarisée et l'équation paraxiale 60° .
- Propagation dans le milieu c_0 hétérogène représenté par la figure 5.1 avec le milieu de perturbation composé de la réflectivité représentée au milieu de la figure 5.7. Les résultats sont illustrés par les figures 5.11 et 5.12
- Propagation dans le milieu de vitesse homogène $c_0 = 2000$ m/s avec le milieu de perturbation composé de la réflectivité représentée en bas de la figure 5.7. Les résultats sont illustrés par les figures 5.13 et 5.14.
- Propagation dans le milieu c_0 hétérogène représenté par la figure 5.1 avec le milieu de perturbation composé de la réflectivité représentée en bas de la figure 5.7. Les résultats sont illustrés par la figure 5.15 et 5.16.

Dans le cas où la solution de l'équation des ondes linéarisée est obtenue par la formule 5.11, c'est à dire via le code de résolution non linéaire, on considère à la fois le champ transmis et le champ diffracté mais seul le champ diffracté nous intéresse pour la comparaison avec l'approximation paraxiale.

On peut observer que le champ transmis n'est pas aussi "lisse" que le champ diffracté, ceci est dû à un problème purement informatique (erreur d'arrondi) qui ne permet pas de choisir le paramètre ε inférieur à 10^{-2} .

En ce qui concerne les trois dernières expériences, les résultats consistent uniquement à comparer le champ diffracté à travers des instantanés de propagation. Pour la présentation des résultats, les figures de gauche correspondent aux instantanés de propagation obtenus par la solution linéarisée et les figures de droite correspondent à l'équation paraxiale 60° . Les instantanés correspondant au même instant sont représentés à la même échelle sur les figures et sont donc directement comparables. On peut alors observer que les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants aussi bien pour les temps d'arrivées que pour les amplitudes tout au moins dans le cadre d'une application géophysique.

Calcul de l'erreur pour les sismogrammes

La suite de ce paragraphe sera consacrée au cas du milieu c_0 homogène avec le milieu de perturbation composé de la réflectivité plane représenté en haut de la figure 5.7.

Le fait d'introduire la solution de l'équation des ondes linéarisée a une importance particulière. En effet, cela va permettre de calculer le pourcentage d'erreur dû, d'une part, à l'approximation de Born elle-même et, d'autre part, à l'approximation paraxiale de l'équation des ondes.

La figure 5.9 représente les trois sismogrammes correspondant à :

- la solution u_{onde} de l'équation des ondes
- la solution u_{lin} de l'équation des ondes linéarisée
- la solution u_{parax} de l'équation paraxiale 60° .

Le sismogramme représenté en haut de la figure 5.9 est la solution de l'équation des ondes auquel on a appliqué un masque pour éliminer les arrivées directes.

L'équation des ondes a été résolue avec une condition de surface libre en $z = 0$ modélisée par une condition au limite de type Neumann donc totalement réfléchissante. Ainsi, pour effectuer la comparaison avec l'équation des ondes, nous avons été amené à multiplier par un facteur 2 la solution de l'équation paraxiale.

Il s'agit maintenant de calculer l'erreur L_2 entre chacune des solutions u_{onde} , u_{lin} et u_{parax} sur le maillage Σ_h défini dans la section 5.1.2

$$E(u_{onde}^h, u_{lin}^h) = 24 \%$$

$$E(u_{onde}^h, u_{parax}^h) = 21 \%$$

$$E(u_{lin}^h, u_{parax}^h) = 41 \%$$

La figure 5.10 représente les sismogrammes correspondant à la différence entre chacune des solutions.

Un calcul de l'erreur de dispersion fait apparaître une erreur de 15% entre la solution de l'équation paraxiale u_{parax}^h sur le maillage Σ_h et u_{parax}^H sur le maillage Σ_H :

$$E(u_{parax}^h, u_{parax}^H) = 15 \cdot 10^{-2}$$

Les calculs d'erreurs présentés dans le tableau suivant ont été obtenus avec le même milieu (milieu c_0 homogène et milieu de perturbation δc composé de la réflectivité plane) pour des perturbations de vitesse $\delta c_1 = 100 \text{ m/s}$, $\delta c_2 = 300 \text{ m/s}$ et $\delta c_3 = 500 \text{ m/s}$. Il s'agit d'étudier le comportement de l'erreur due à l'approximation de Born et à l'approximation paraxiale pour des perturbations de vitesse de plus en plus grande.

	$\delta c_1 = 100 \text{ m/s}$	$\delta c_2 = 300 \text{ m/s}$	$\delta c_3 = 500 \text{ m/s}$
$E(u_{onde}^h, u_{lin}^h) (\%)$	9	24	38
$E(u_{lin}^h, u_{parax}^h) (\%)$	19	21	20
$E(u_{onde}^h, u_{parax}^h) (\%)$	27	41	54

Il est intéressant de noter que l'erreur due à l'approximation paraxiale par rapport à l'équation des ondes linéarisée est à peu près constante et se situe autour de 20%.

Quant à l'approximation de Born, on peut remarquer que celle-ci augmente au fur et à mesure que la perturbation de vitesse augmente. Ceci permet de vérifier que la linéarisation ne se justifie que dans le cas d'une petite perturbation de vitesse.

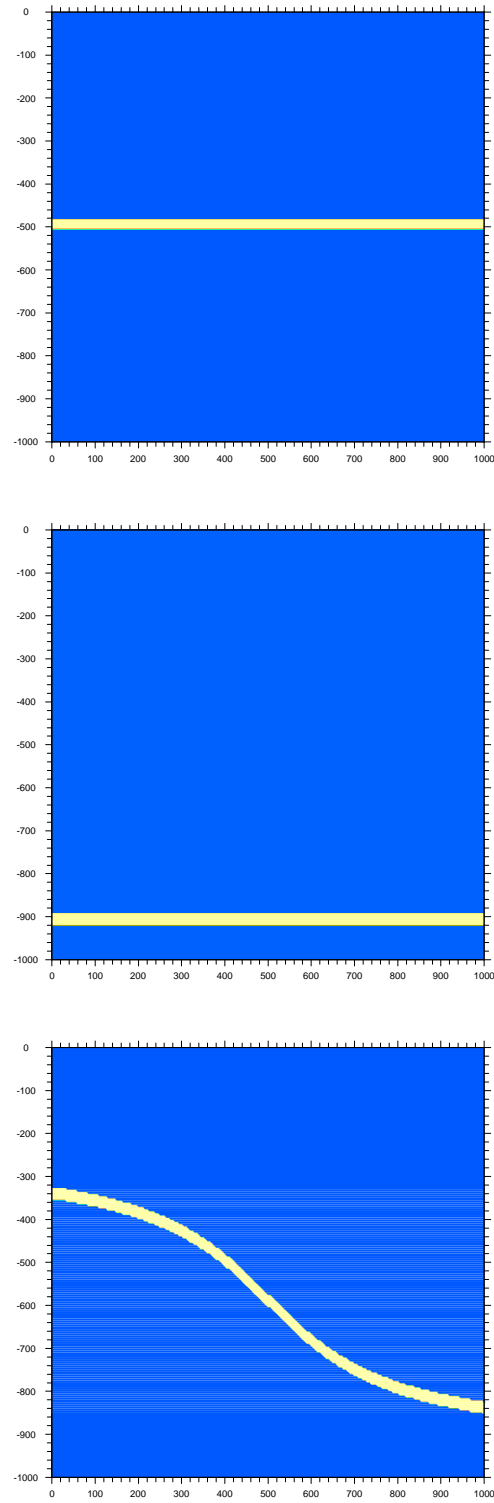


FIG. 5.7 – Milieux de perturbation (réflectivité) $\delta c(x, z)$ considérés. Axe horizontal: distance(m), axe vertical: altitude(m). Haut: Réflectivité plane correspondant à une perturbation de 300 m/s. Milieu: Réflectivité plane correspondant à une perturbation de 600 m/s. Bas: Réflectivité courbe correspondant à une perturbation de 300 m/s.

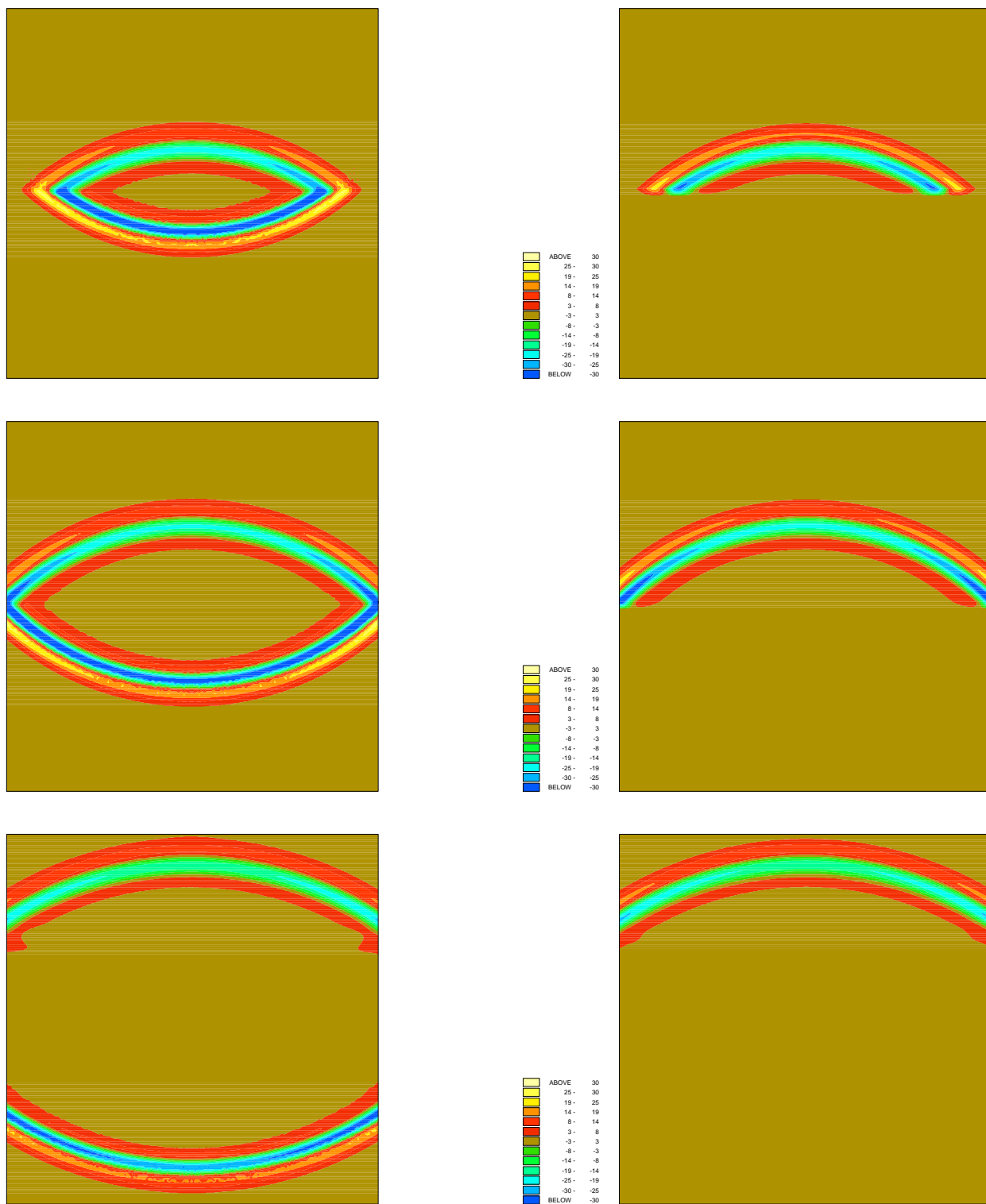


FIG. 5.8 – Instantannés pris au cours de la propagation du champ diffracté dans le milieu homogène $c_0 = 2000$ m/s induit par le réflecteur plan défini en haut de la figure 5.7. Figures de gauche : propagation avec l'équation des ondes linéarisée. Figures de droite : propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.35s$ Milieu : instant $t = 0.4s$ Bas : instant $t = 0.5s$

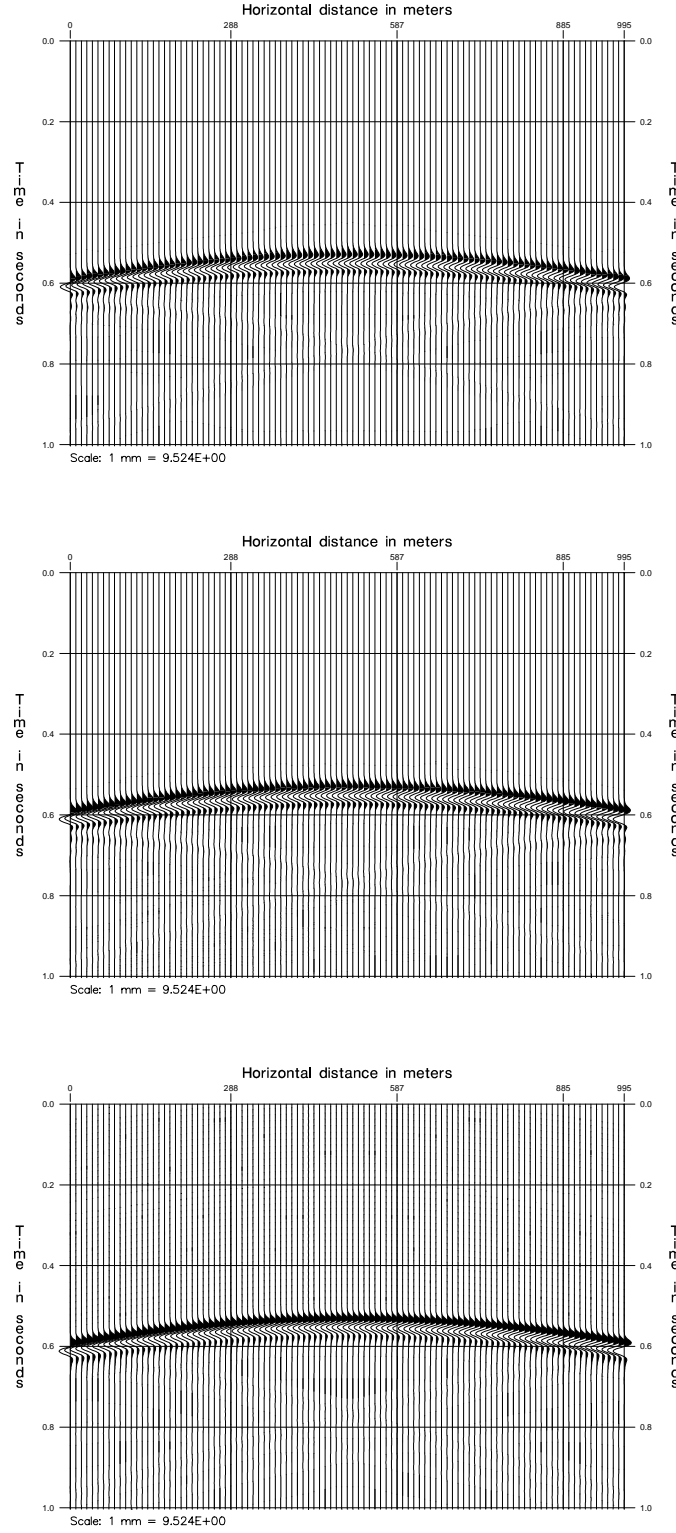


FIG. 5.9 – Sismogrammes pour le milieu c_0 homogène avec le réflecteur plan. Axe horizontal: distance(m), axe vertical: temps (s). Haut: sismogramme obtenu par l'éq. des ondes. Milieu: sismogramme obtenu par l'éq. des ondes linéarisée. Bas: sismogramme obtenu par l'éq. paraxiale 60° .

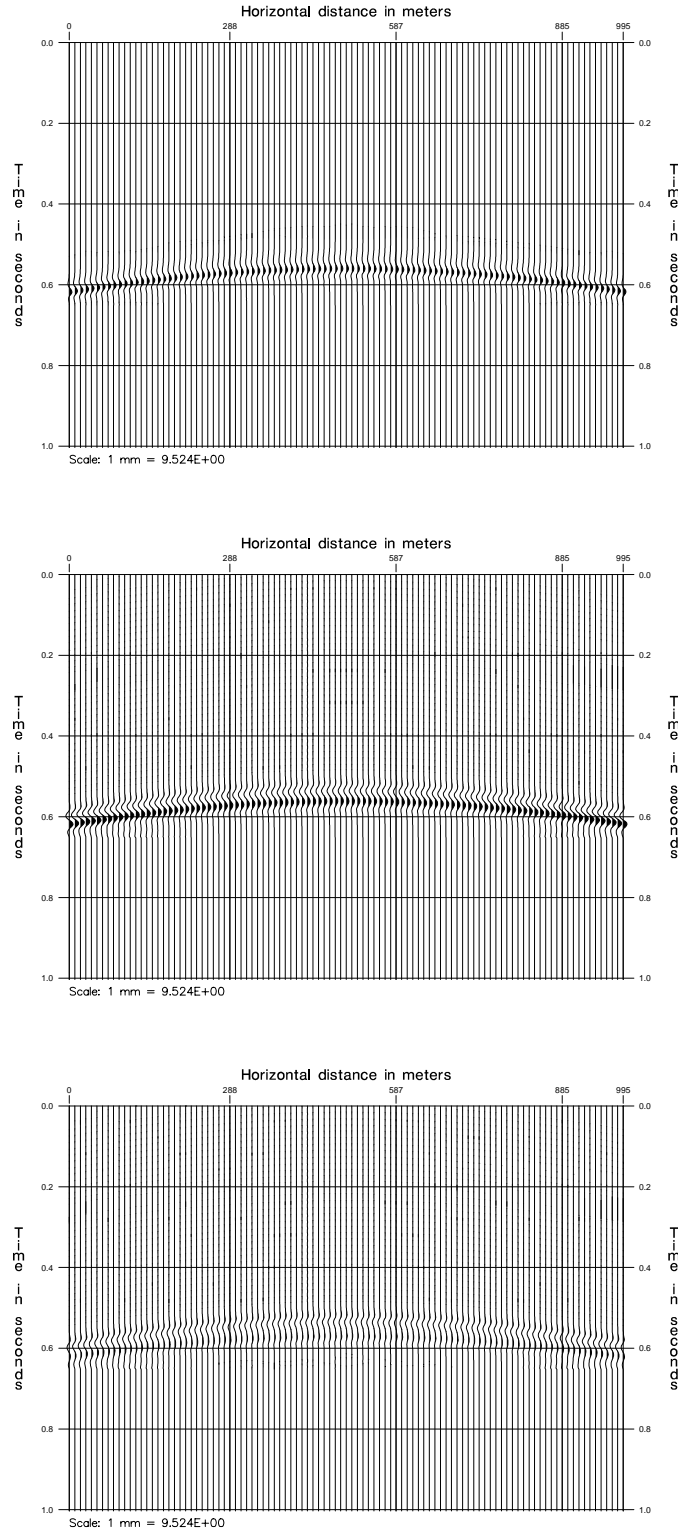


FIG. 5.10 – Sismogrammes représentant l'écart entre les solutions. Axe horizontal: distance(m), axe vertical: temps (s). Haut: différence entre u_{onde} et u_{lin} . Milieu: différence entre u_{onde} et u_{parax} . Bas: différence entre u_{lin} et u_{parax} .

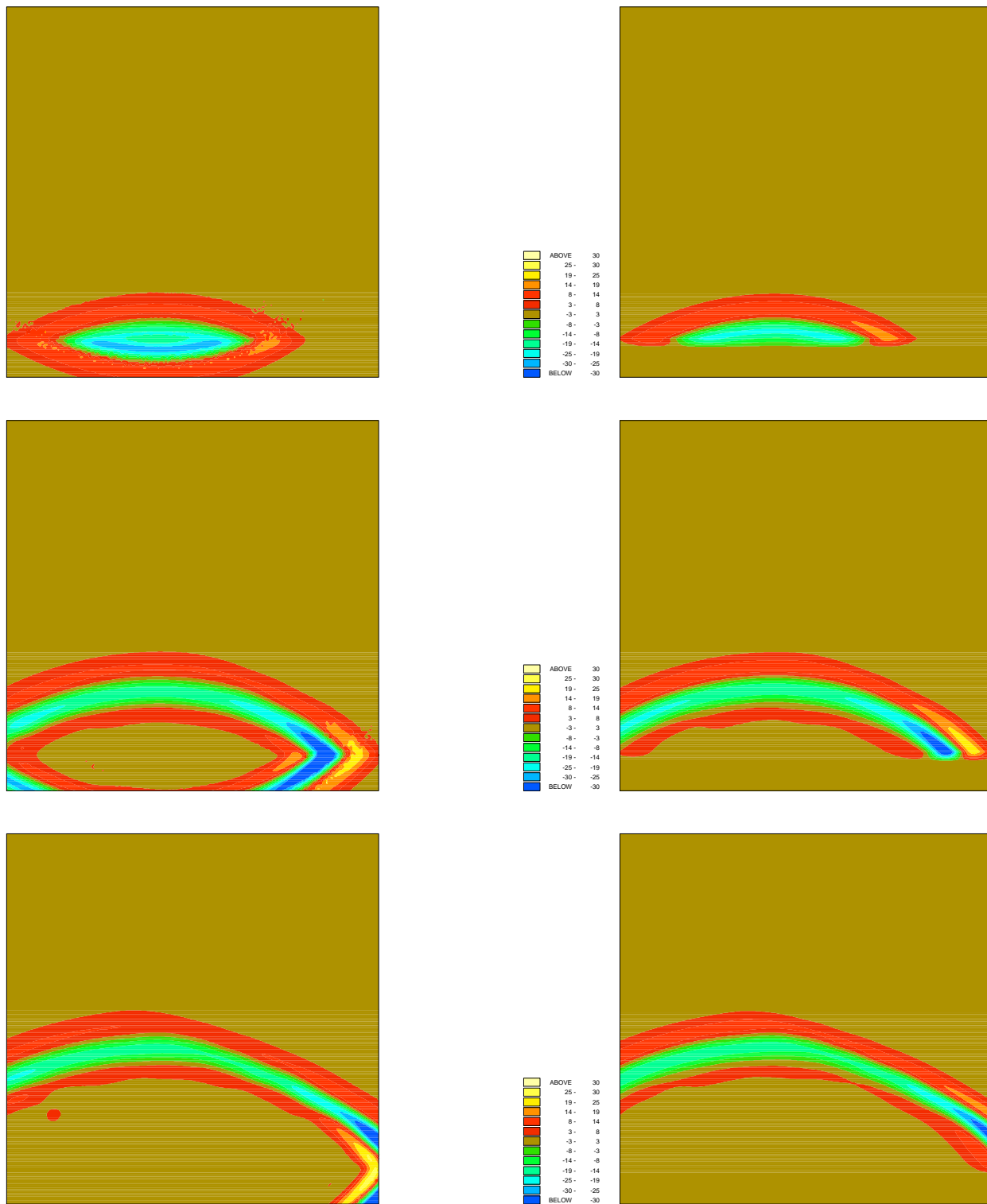


FIG. 5.11 – Instantannés pris au cours de la propagation du champ diffracté dans le milieu c_0 hétérogène (fig. 5.1) induit par le réflecteur plan défini au milieu de la figure 5.7. A gauche : propagation avec l'équation des ondes linéarisée. A droite : propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.45s$ Milieu : instant $t = 0.5s$ Bas : instant $t = 0.55s$

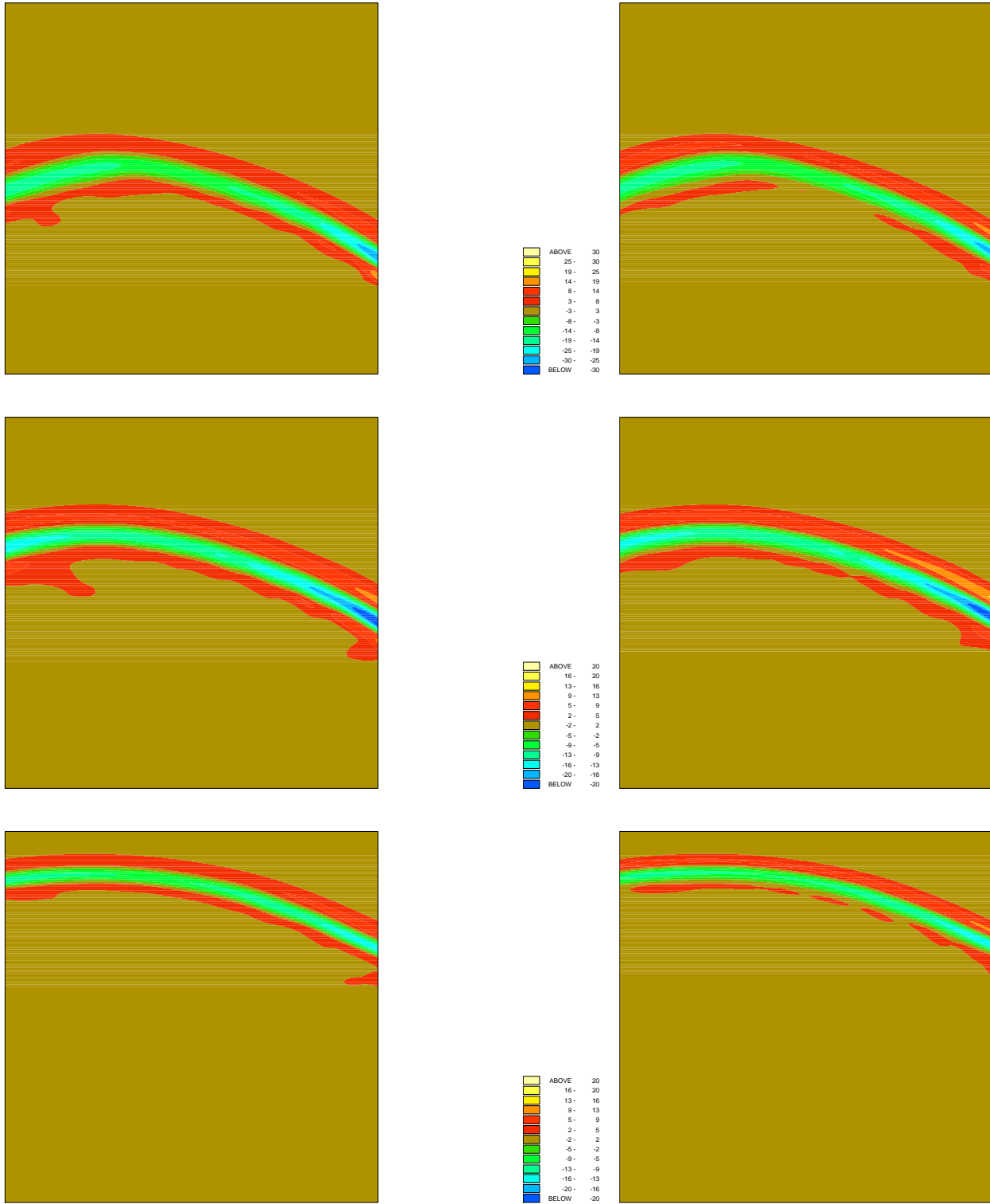


FIG. 5.12 – Instantannés pris au cours de la propagation du champ diffracté dans le milieu c_0 hétérogène (fig. 5.1) induit par le réflecteur plan défini en haut de la figure 5.7. A gauche : propagation avec l'équation des ondes linéarisée. A droite : propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.6s$ Milieu : instant $t = 0.65s$ Bas : instant $t = 0.75s$

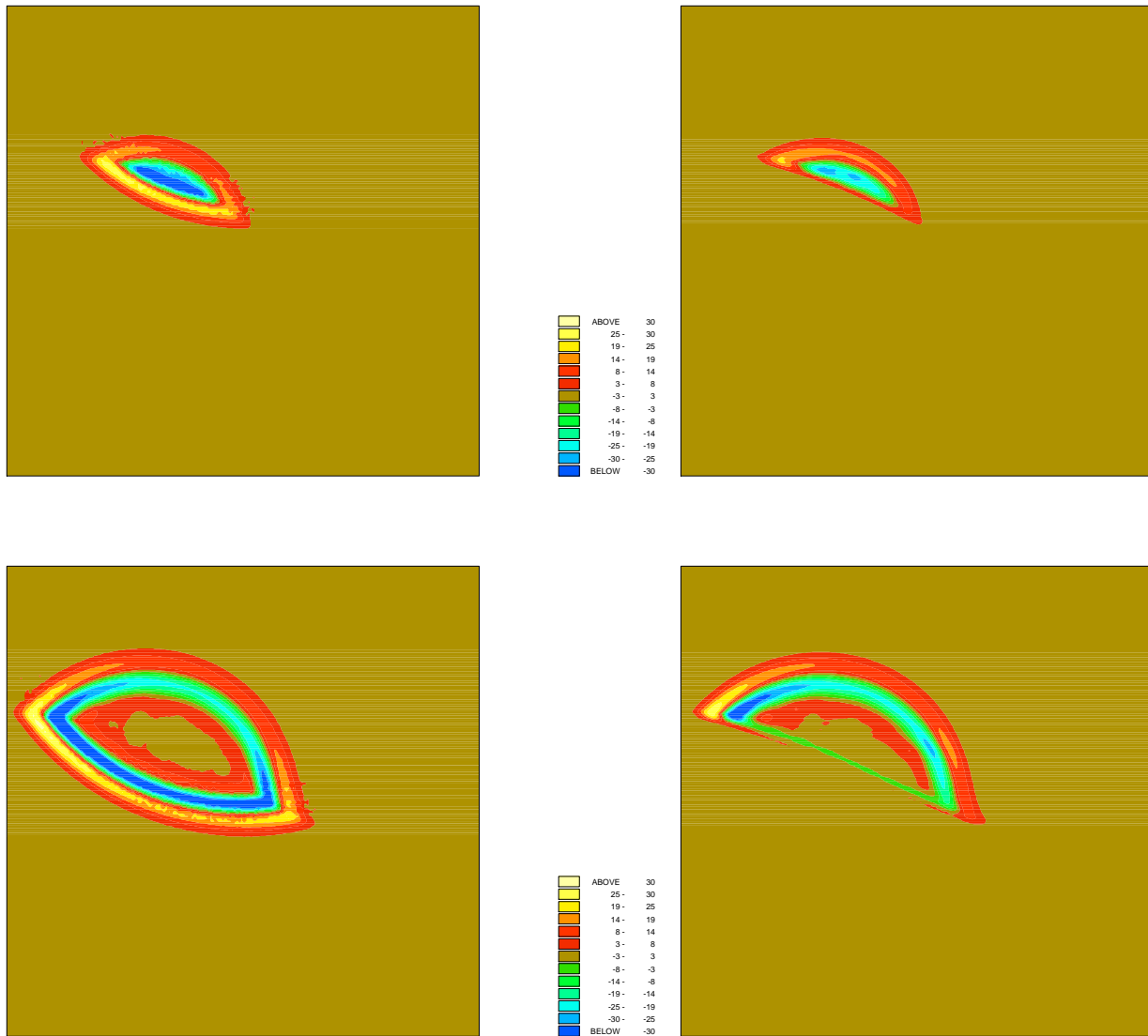


FIG. 5.13 – Instantannés pris au cours de la propagation du champ diffracté dans le milieu homogène $c_0 = 2000$ m/s induit par le réflecteur défini à partir d’une courbe arctangente (fig. 5.7) A gauche : propagation avec l’équation des ondes complètes. A droite : propagation avec l’équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.25s$ Bas : instant $t = 0.3s$

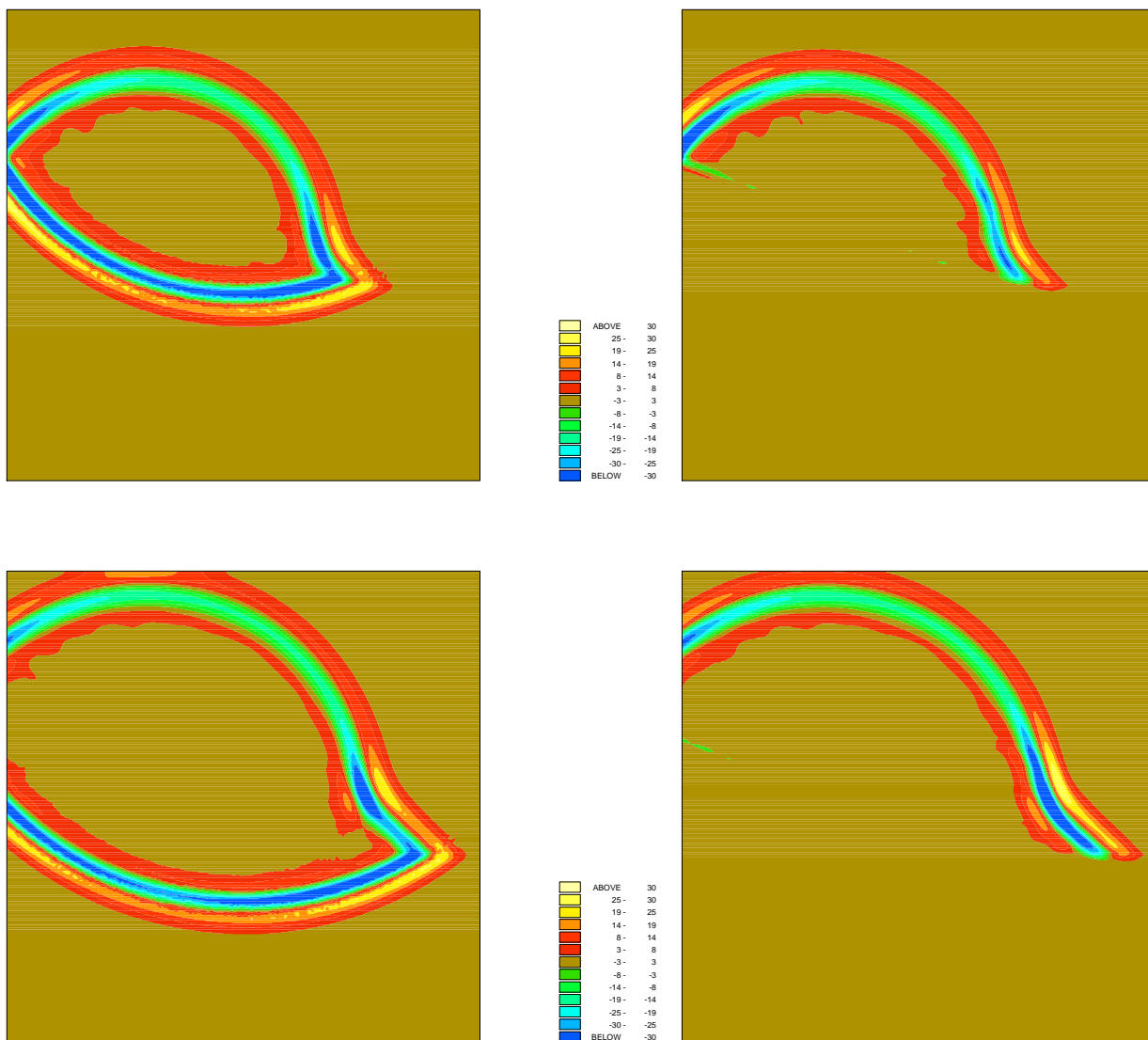


FIG. 5.14 – Instantannés pris au cours de la propagation du champ diffracté dans le milieu homogène $c_0 = 2000$ m/s induit par le réflecteur défini à partir d’une courbe arctangente (fig. 5.7) A gauche : propagation avec l’équation des ondes complètes. A droite : propagation avec l’équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.35s$ Bas : instant $t = 0.4s$

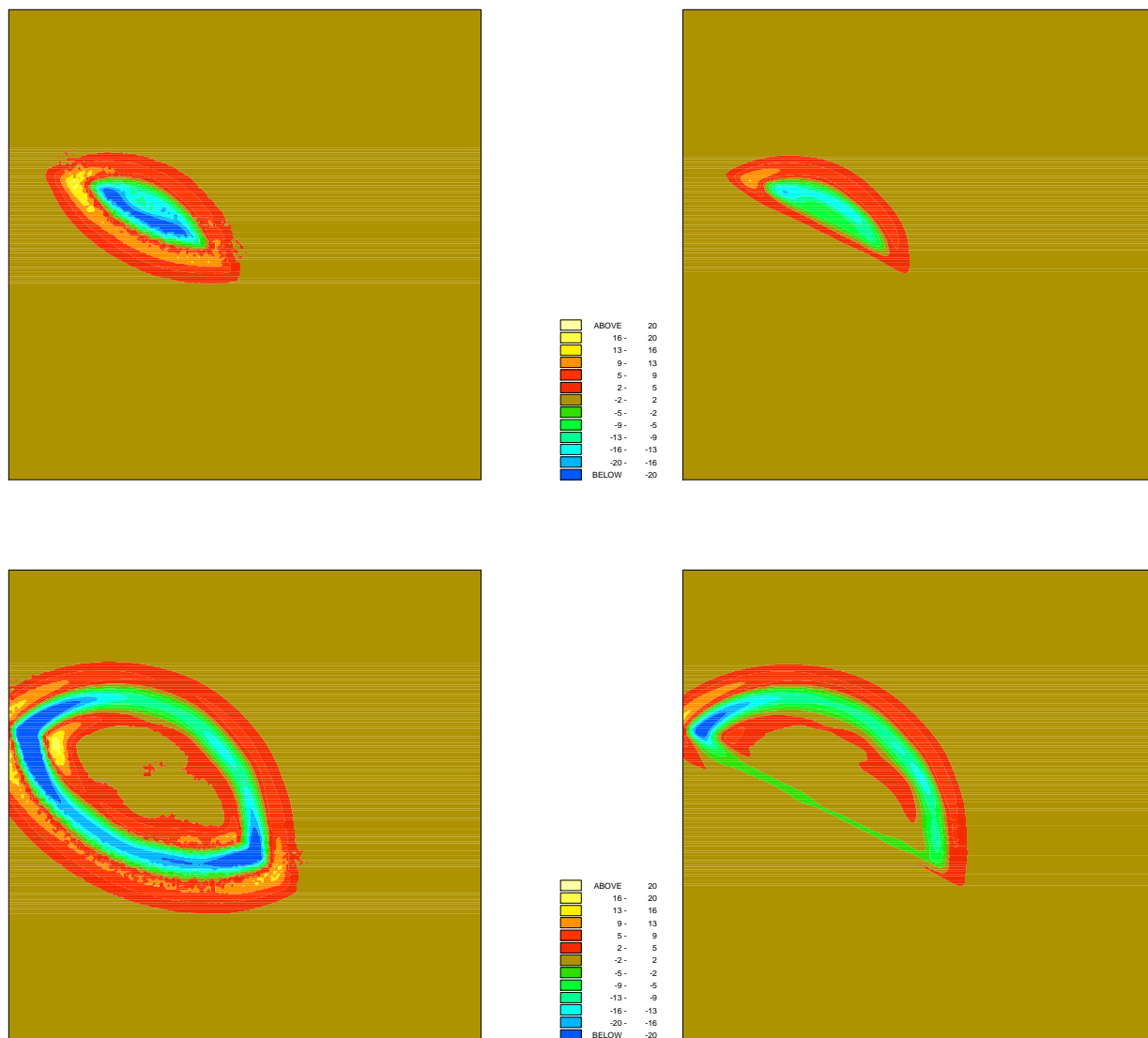


FIG. 5.15 – Instantannés pris au cours de la propagation du champ diffracté dans le milieu hétérogène (fig. 5.1) induit par le réflecteur défini à partir d’une courbe arctangente (fig. 5.7) A gauche : propagation avec l’équation des ondes complètes. A droite : propagation avec l’équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.3s$ Bas : instant $t = 0.35s$

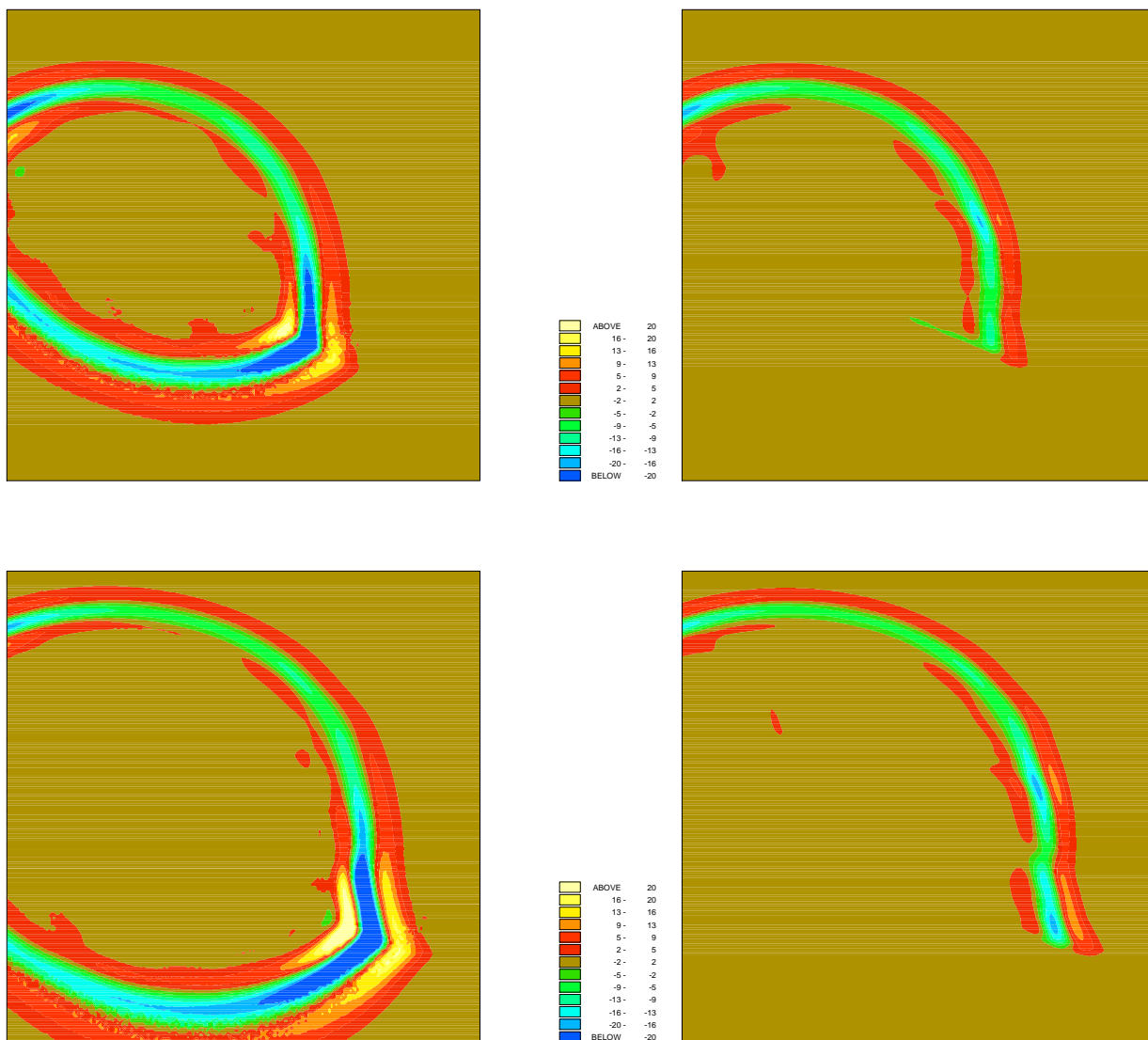


FIG. 5.16 – Instantannés pris au cours de la propagation du champ diffracté dans le milieu hétérogène (fig. 5.1) induit par le réflecteur défini à partir d'un courbe arctangente (fig. 5.7) A gauche : propagation avec l'équation des ondes complètes. A droite : propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut : instant $t = 0.4s$ Bas : instant $t = 0.45s$

5.4 Résultats pour la lentille

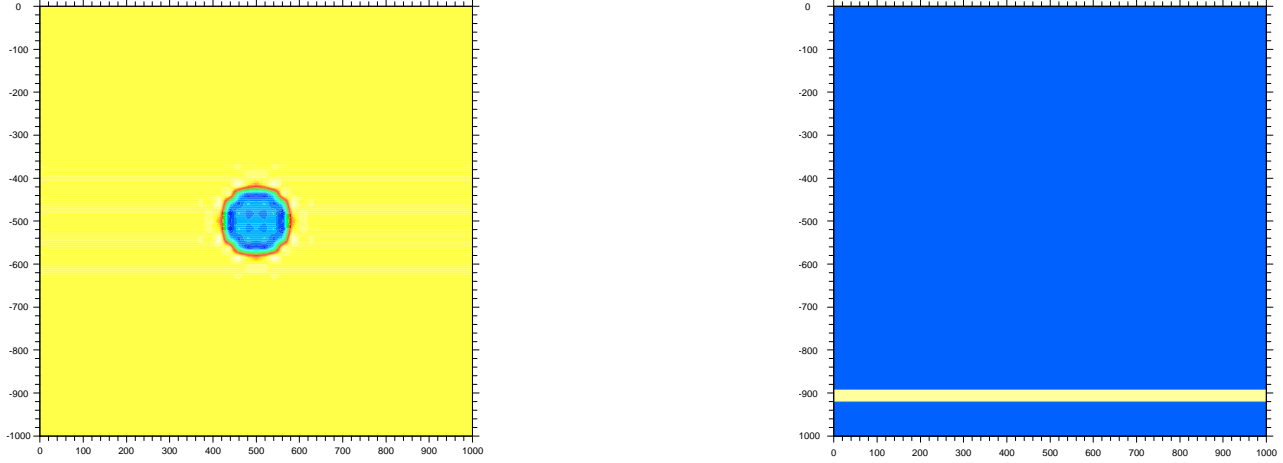


FIG. 5.17 – milieu c_0 et δc considéré. Axe horizontal: distance(m), axe vertical: altitude(m). Gauche : milieu c_0 composé d'une lentille faisant apparaître une diminution de vitesse de 500 m/s. Droite : Réflecteur plan correspondant à une perturbation de 300 m/s.

Le but de cette expérience est de montrer comment les équations paraxiales permettent de retrouver les temps d'arrivées multiples. Pour cela, on considère un milieu homogène $c_0 = 2000$ m/s dans lequel on place une lentille qui fait passer la vitesse de 2000 à 1500 m/s (fig. 5.17). La diminution de vitesse est suffisamment progressive pour ne pas générer de réflexion lorsqu'on propage avec l'équation des ondes.

Il s'agit tout d'abord de comparer l'équation des ondes et son approximation paraxiale pour des instantanés de propagation du champ incident dans le milieu c_0 . Les résultats sont donnés par la figure 5.18. Les instantanés de propagation ont été obtenus sur le maillage Ω_h et sont représentés à la même échelle pour deux 2 instants identiques.

On peut alors observer qu'une caustique s'est formée en dessous de la lentille faisant apparaître une multiplication du front d'onde aussi bien pour l'équation des ondes que pour l'équation paraxiale 60° .

L'utilisation des équations paraxiales permet ici de prendre l'avantage sur les méthodes de type approximation de Born + tracé de rayons qui ne prennent généralement pas en compte les temps d'arrivées multiples.

Afin de quantifier l'erreur introduite par l'approximation paraxiale de l'équation des ondes, nous avons effectué un calcul d'erreur sur les sismogrammes obtenus lorsqu'on place une réflectivité plane en dessous de la lentille (cf. fig. 5.17). Les sismogrammes sur le maillage Σ_h correspondent à l'enregistrement en $z = 0$ du champ diffracté et sont représentés sur la figure 5.19. La différence entre le sismogramme obtenu par l'équation des ondes et celui obtenu par l'équation paraxiale 60° est représentée en bas de la figure 5.19. Le calcul de l'erreur L_2 sur Σ_h entre les deux solutions fait apparaître seulement 30% d'erreur

$$E(u_{\text{onde}}^h, u_{\text{parax}}^h) = 30 \cdot 10^{-2}$$

ce qui permet de justifier l'utilisation des équations paraxiales pour restituer les temps d'arrivées multiples.

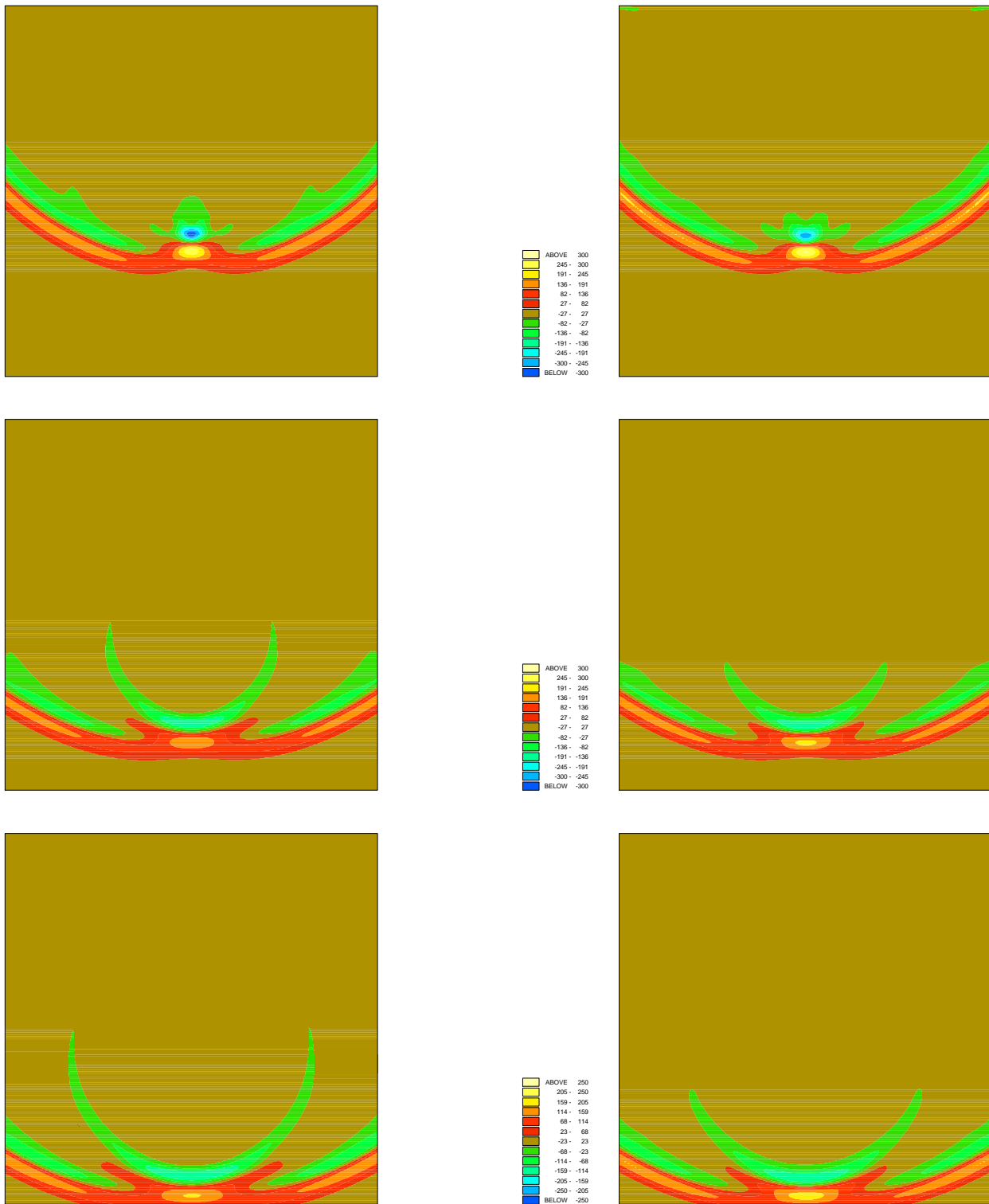


FIG. 5.18 – Instantannés pris au cours de la propagation d'un point source dans le milieu c_0 défini par la figure 5.17 Figures de gauche: propagation avec l'équation des ondes. Figures de droite: propagation avec l'équation paraxiale 60° . Haut: instant $t = 0.4s$ Milieu: instant $t = 0.5s$ Bas: instant $t = 0.55s$

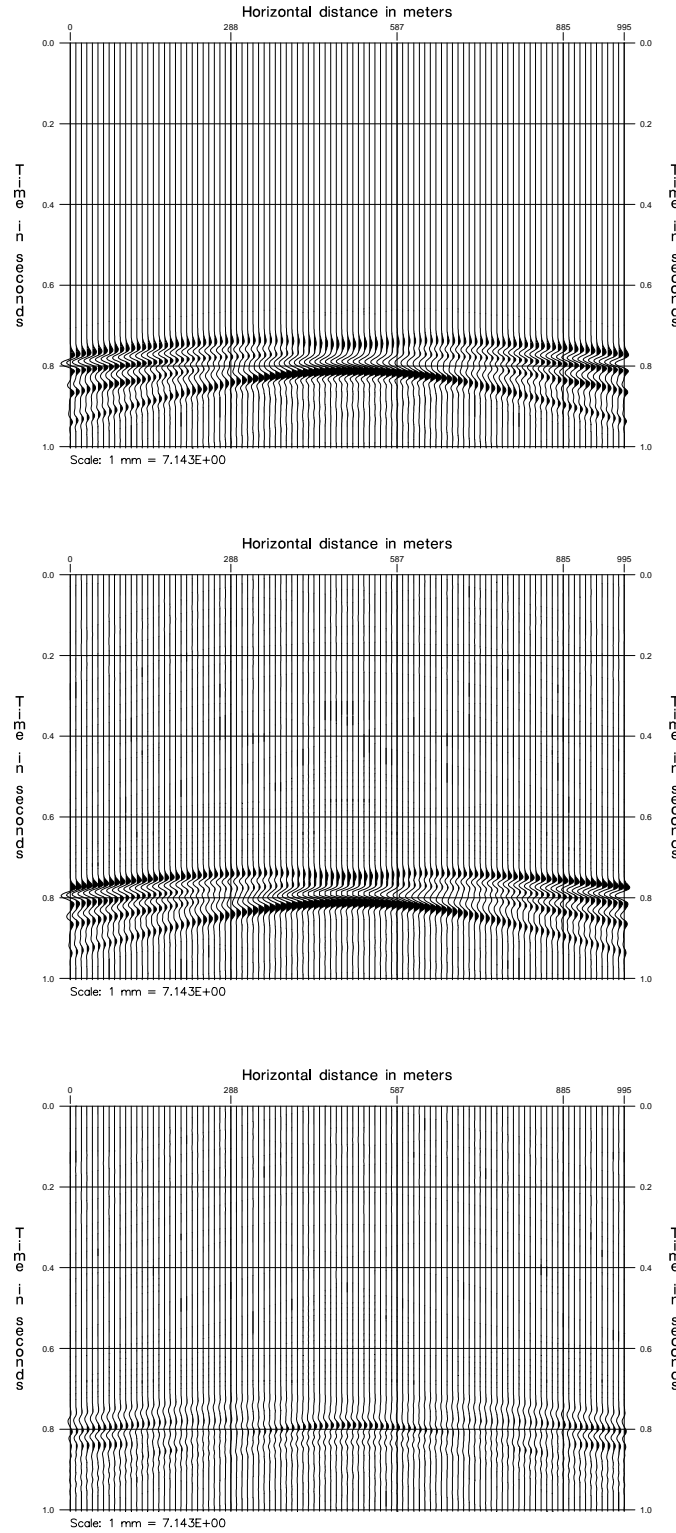


FIG. 5.19 – Sismogrammes pour le milieu c_0 composé d'une lentille (Fig. 5.17) avec un milieu de perturbation composé d'un réflecteur plan (Fig. 5.17). Axe horizontal: distance(m), axe vertical: temps (s). Haut: sismogramme obtenu par l'éq. des ondes. Milieu: sismogramme obtenu par l'éq. paraxiale 60° . Bas: différence entre les 2 sismogrammes.

5.5 Résultats pour le modèle de Marmousi

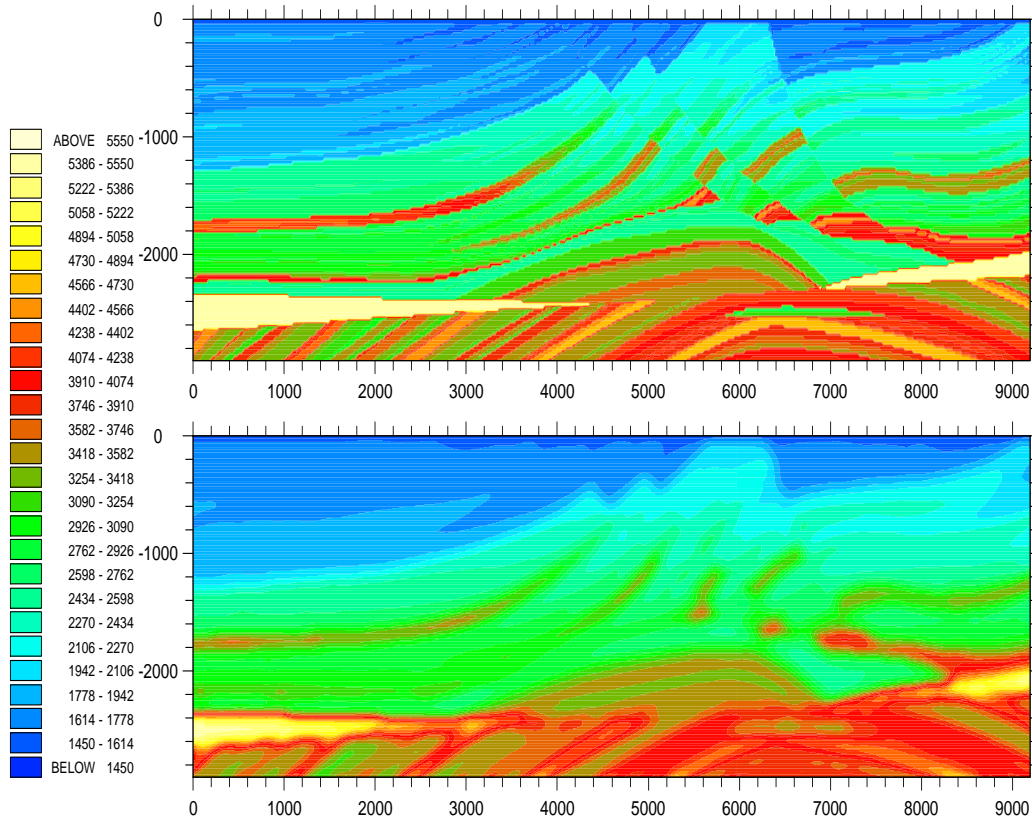


FIG. 5.20 – *Milieu de vitesse de Marmousi. axe horizontal: distance(m), axe vertical: altitude (m). Haut: milieu de Marmousi original de taille 9192 m \times 2904 m. Bas: milieu c_0 généré à partir d'un lissage du milieu de Marmousi.*

Cette expérience est consacrée à un résultat de simulation sur le modèle de Marmousi. Il s'agit de comparer le sismogramme obtenu par l'équation des ondes et le sismogramme obtenu par l'équation paraxiale 60° pour un milieu de vitesse relativement complexe. Ce modèle a été créé à l'IFP et est très réaliste tant par ses dimensions que par la complexité de sa structure. La vitesse varie entre 1500 et 6000 m/s et ses dimensions sont $L = 9192$ m et $Z = 2904$ m. La propagation a lieu dans le milieu c_0 représenté en bas de la figure 5.20 et correspond à un lissage du milieu de Marmousi. Ce modèle de vitesse a fait l'objet de problème test pour le calcul des temps d'arrivées multiples au cours de la conférence à l'INRIA "Computation of multi-valued traveltimes" à Paris en 1996.

Pour cette expérience, la source est localisée en profondeur $x_S = 6000$ m, $z_S = 2904$ m et les récepteurs sont régulièrement positionnés en surface tous les 24 m.

Pour la propagation avec l'équation des ondes et pour s'affranchir des problèmes de dispersion numérique, le schéma numérique impose de prendre un maillage comportant 1534×486 points de discrétisation ce qui correspond à $\Delta x = \Delta z = 5$ m.

Pour la propagation avec l'équation paraxiale 60° , le schéma numérique présenté est très stable et nous nous sommes contenté de prendre un maillage comportant 384×122 points de discrétisation ce qui correspond à $\Delta x = \Delta z = 24$ m soit 4 fois moins de points de discrétisation dans chaque direction.

Les résultats sont représentés par la figure 5.21 et le temps de simulation est $T_S = 2.08$ s. On peut observer que le sismogramme obtenu avec l'équation paraxiale 60° est très proche de celui obtenu avec l'équation des ondes et que les temps d'arrivées multiples sont parfaitement restitués. On notera cependant, pour la solution paraxiale, une augmentation de l'amplitude pour les arrivées tardives qui

est due au phénomène de dispersion numérique du schéma. La dispersion qui apparaît reste toutefois relativement faible et influe peu sur la qualité des résultats obtenus.

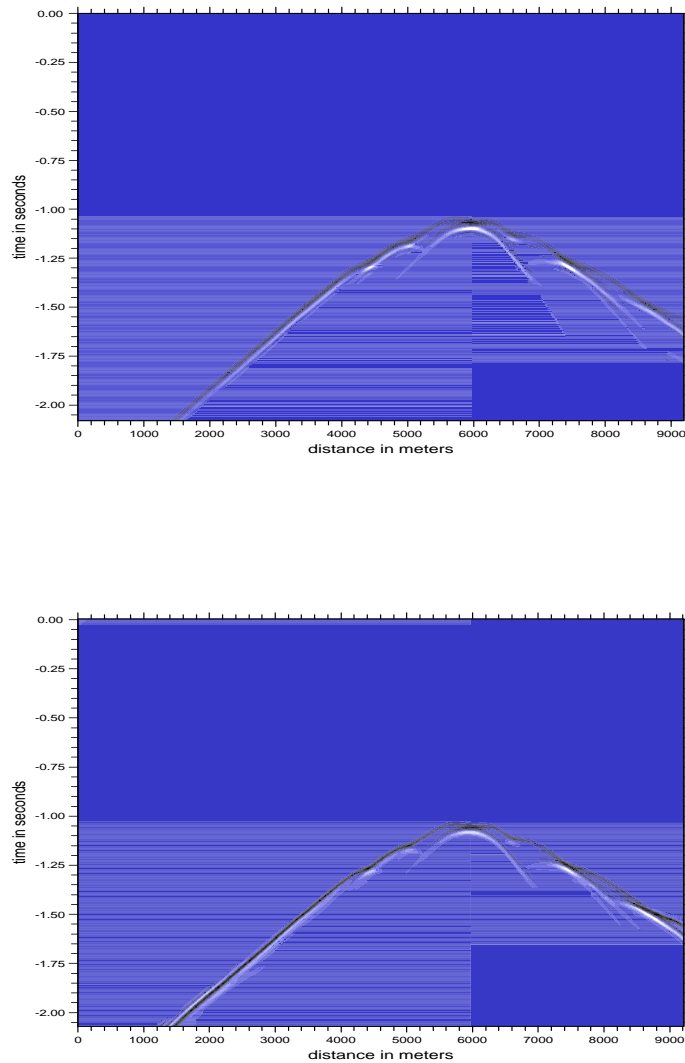


FIG. 5.21 – Sismogrammes pour le milieu c_0 de Marmousi. Axe horizontal: distance(m), axe vertical: temps (s). Haut: sismogramme obtenu par l'éq. des ondes. Bas: sismogramme obtenu par l'éq. paraxiale 60° .

Références

- [1] A. Bamberger, B. Engquist, L. Halpern, and P. Joly. Construction et analyse d'approximations paraxiales en milieu hétérogène, part1 : approximation parabolique. *Centre de mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique*, 114, 1984.
- [2] A. Bamberger, B. Engquist, L. Halpern, and P. Joly. Construction et analyse d'approximations paraxiales en milieu hétérogène, part2 : Approximation d'ordre supérieur. *Centre de mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique*, 128, 1984.
- [3] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Accepted for publication in J. of Comp. Physics*, 1994.
- [4] A. J. Berkhout. Seismic migration : Imaging of acoustic energy by wavefield extrapolation. theoretical aspects. *Elsevier Science Publ.*, 1985.
- [5] N. Bleistein, J.K. Cohen, and J.W. Stockwell. Mathematics of multidimensionnal seismic inversion. 1995.
- [6] M. Charara and A. Tarantola. Boundary conditions and the source term for one-way acoustic depth extrapolation. *Geophysics*, 61:244–249, 1996.
- [7] J.F. Claerbout. Coarse grid calculation of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure. *Geophysics*, 35:407–418, 1970.
- [8] J.F. Claerbout. Imaging the earth's interior. *Blackwell Scientific Publication*, 1985.
- [9] F. Collino. Analyse numérique de modèles de propagation d'ondes, application à la migration et à l'inversion de données sismiques. *Thèse de 3ème cycle Paris*, 1986.
- [10] F. Collino. Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations. 1995.
- [11] A.A. Dubrulle. On numerical methods for migration in layered media. *Geophysical Prospecting*, 31:237–264, 1983.
- [12] B. Duquet. Amélioration de l'imagerie sismique de structures géologiques complexes. *Thèse de 3ème cycle Paris*, 1996.
- [13] R. L. Graves and R. W. Clayton. Modeling acoustic waves with paraxial extrapolators. *Geophysics*, 55:306–319, 1990.
- [14] L. Halpern. The paraxial approximation in heterogeneous medium : some new results. *Proc Fifth IMACS International Symposium on Computer Methods for PDE, Lehigh University*, 1984.
- [15] M. W. Lee and S. Y. Suh. optimization of the one-way wave equation. *Geophysics*, 50:1634–1637, 1985.
- [16] Y.Y. Lu and J.R. McLaughlin. Spectral analysis of the parabolic equation method. *Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute Troy, NY 12180*, 1995.
- [17] W.W. Symes. Mathematics of reflection seismology. *Ecole des ondes Problème inverse en propagation d'onde*, 1995.
- [18] C. P. A. Wapenaar. Representation of seismic sources in the one-way wave equations. *Geophysics*, 55:786–790, 1990.

-
- [19] G.Q. Zhang. High order approximate one-way wave equations. *Technical Report, Computing center, Academia Sinica, China*, 1984.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399